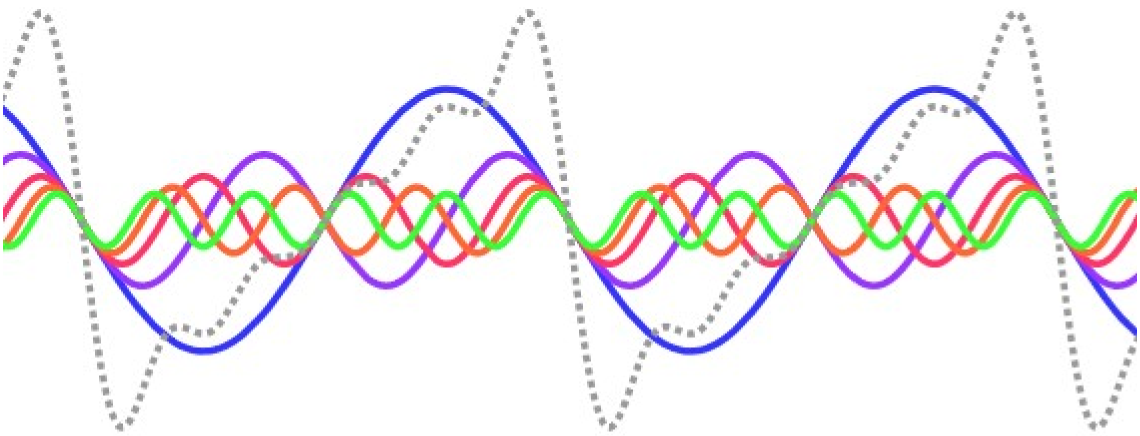
Ma2_Fourierrekker

http://ansatte.hin.no/tg

26.12.2015 12:29



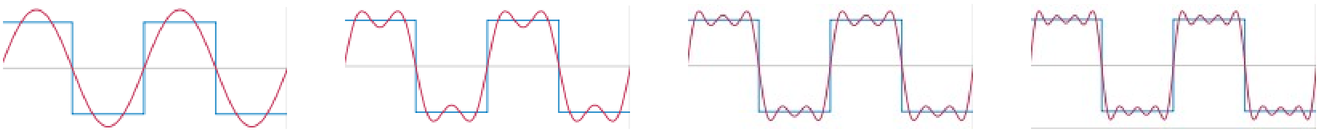
Innhold

Fourierrekker..2
- Periodiske funksjoner..2
- Trigonometriske rekker..3
- Fourierrekker..4
- Periodiske funksjoner med T = 2 π...4
- Like og odde periodiske funksjoner..5
- Periodiske funksjoner med T = 2 L...6
- Sum av funksjoner, parallellforskyvning..................................8
- Trigonometriske triks...9
- MATLAB tar saken...10
- Halvperiodiske utvidelser...11
- Fourierrekker på 1-2-3...12

Fourierrekker

Fourierrekker brukes til å beskrive periodiske funksjoner som en rekkeutvikling av sinus- og cosinusfunksjoner. Typiske fagområder der dette er et nyttig analyseverktøy er elektro, mekaniske svingninger, akustikk, optikk, signalbehandling, bildebehandling og flere.

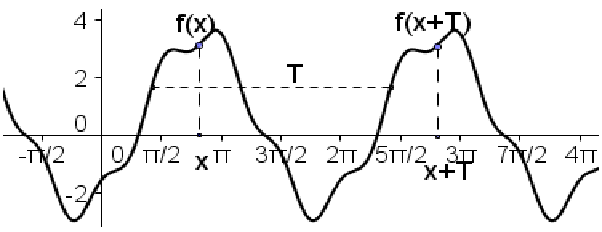
Her er ideen vist ved å la summen av en eller flere sinusfunksjoner (rød kurve) være delsummer i rekkeutviklingen av en regelmessig firkantpuls funksjon (blå kurve).



Til venstre vises første ledd i Fourierrekka bestående av en enkelt sinusfunksjon (med samme frekvens og fase som firkantfunksjonen). Neste figur viser summen av første og andre ledd i rekkeutviklingen – deretter summen av de første tre ledd, og til slutt med 4 ledd. Det hører med til historien at frekvensene på de høyere ordens ledd øker harmonisk (eller 1, 3, 5, 7,... eller 2, 4, 6, 8, ...) og amplitudeverdiene avtar etter en viss regelmessighet.

Periodiske funksjoner

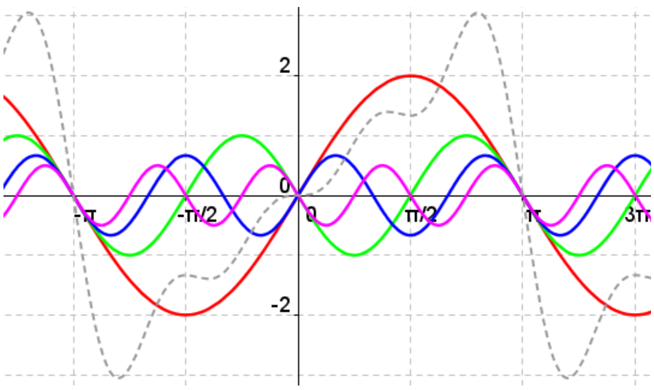
En periodisk funksjon gjentar funksjonsforløpet etter en gitt perode, *T*, slik at *f*(*t* + *T*) = *f*(*t*). Perioden kan være gitt som tid eller vinkel.



De trigonometriske funksjonene $\sin(x)$ og $\cos(x)$ har periode $T = 2\pi$. Det betyr at

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + k \cdot 2\pi) \qquad \text{og} \qquad \cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + k \cdot 2\pi)$$

Her er plot av noen sinusfunksjoner. Summen av funksjonene er vist som grå, stiplet kurve.



Rød: $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$

Grønn: $g(x) = -\frac{2}{2} \cdot \sin(2x)$

Blå: $h(x) = \frac{2}{3} \sin(3x)$

Purpur: $p(x) = -\frac{2}{4} \sin(4x)$

Grå: $f(x) + g(x) + h(x) + p(x)$

Teorien om fourierrekker sier at en periodisk funksjon *f*(*x*) kan erstattes med ei uendelig trigonometrisk rekke (sum av sinus- og cosinusfunksjoner) som konvergerer for alle $x \in \mathbb{R}$ (med unntak av noen diskrete verdier). Figuren ovenfor antyder at om vi fortsetter å legge til ledd vil summen gå mot en 'sagtannkurve'. Amplitudeverdiene er stadig (og alternerende) avtakende og det samme er periodene,

$$\text{sum} = \frac{2}{1} \sin x - \frac{2}{2} \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{2}{4} \sin 4x = 2 \sum_{n=1}^{4} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sin(n \cdot x)$$

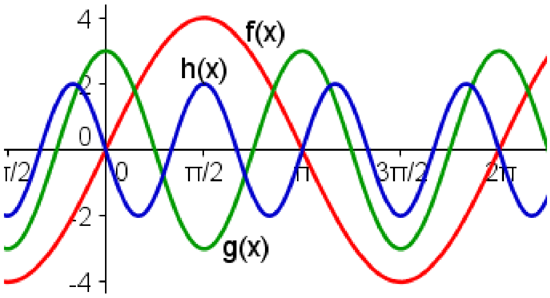
En sinusfunksjon med periode $T=2\pi$ er generelt gitt som

$$f(x)=a\cdot\sin(n\cdot x) \qquad \begin{array}{l} a:\ \text{amplitude, maksimalt utsving} \\ n:\ \text{frekvensmultiplikator} \end{array}$$

Fourierrekker vil bestå av sinusfunksjoner med ulike amplituder og med perioder som minker i størrelsesforhold 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, ... Det oppnår vi ved å la vinkelargumentet være $(n\cdot x)$ der $n=1,2,3,\ldots$.

Eksempel 1

Finn amplituder, perioder og funksjonsuttrykk for de tre sunus-/cosinus-funksjonene:



Ser at $f(x)$ er en sinusfunksjon som har amplitude $a=4$ og periode $T=2\pi$,
$f(x)=4\sin(x)$.
Ser at $g(x)$ er en cosinuskurve med amplitude $a=3$ og periode $T=\pi$,
$g(x)=3\cos(2x)$.
Kurven for $h(x)$ viser en sinusfunksjon med amplitude $|a|=2$ og perode $T=2\pi/3$,
$h(x)=-2\sin(3x)$

Trigonometriske funksjoner brukes til å beskrive periodiske forløp som svingninger, bølgebevegelser, vekselspenninger med tid som variabel i stedet for vinkel. For eksempel vil lysnettspenningen med 50Hz frekvens til husholdninger variere etter tidsfunksjonen

$$v(t)=325\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{20\text{ ms}}t\right)=325\cdot\sin(2\pi\cdot 50\,\text{Hz}\cdot t) \quad \text{[Volt]}$$

I slike sammenhenger er det vanlig å bruke periode*tiden*, her $T_P=20\,\text{ms}$ som mål for tiden det tar for spenningen å gjennomløpe en periode som målt i vinkel er 2π . Vi må altså skille mellom perioden T som brukes i teorien om fourierrekker og periode*tiden* T_P ,

$f(x)=a\cdot\sin(x)$ - en sinusfunksjon med periodevinkel 2π ,

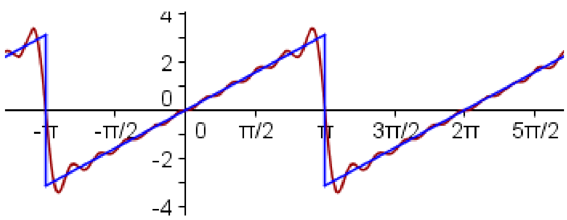
$f(t)=a\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T_P}t\right)$ - en sinusfunksjon med periode*tid* T_P .

Trigonometriske rekker

Det viser seg at de trigonometriske funksjonene $\sin x$ og $\cos x$ har de egenskapene som trengs for å lage rekkeutvikling av vilkårlige periodiske funksjoner. Her er nok en illustrasjon på hva som ligger i dette, den blå kurven nedenfor er grafen til funksjonen

$$f(x)=x \quad , \quad -\pi<x\leq\pi \quad , \quad f(x)=f(x+2\pi) \quad .$$

Legg merke til funksjonsuttrykket, det gir en rett linje fra $(-\pi,-\pi)$ til (π,π) gjennom origo, og siste del sier at dette gjentar seg med periode 2π .



Uten videre begrunnelse setter jeg opp fourierrekka for funksjonen,

$$f(x)=x\approx 0+\frac{2}{1}\sin x-\frac{2}{2}\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\frac{2}{4}\sin 4x+\ldots=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\sin nx$$

La oss gjøre et eksperiment med denne rekka, vi setter inn $x=\pi/2$ og regner ut rekkeleddene,

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot 1-\frac{2}{2}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot(-1)-\frac{2}{4}\cdot 0+\frac{2}{5}\cdot 1+\ldots=\frac{2}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}-\ldots=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

Sterke saker, vi har nå fått en rekkeutvikling av π , $\pi=4/1-4/3+4/5-4/7+\ldots$.

Fourierrekker

Som en oppvarming til teorien om fourierrekker tar vi fatt på periodiske funksjoner med periode $T=2\pi$. I neste omgang ser vi på periodiske funksjoner med vilkårlig periode.

Periodiske funksjoner med T = 2 π

Definisjon

Fourierrekka til en stykkevis kontinuerlig funksjon f på intervallet $[-\pi,\pi>$ er

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_1\cos x+\boldsymbol{b}_1\sin x+\boldsymbol{a}_2\cos 2x+\boldsymbol{b}_2\sin 2x+\boldsymbol{a}_3\cos 3x+\boldsymbol{b}_3\sin 3x+\ldots$$
$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{a}_n\cos(nx)+\boldsymbol{b}_n\sin(nx)$$

der *fourierkoeffisientene* beregnes slik for *n*=1,2,3,... ,

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx \qquad \boldsymbol{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(nx)\,dx \qquad \boldsymbol{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin(nx)\,dx$$

Fourierrekka er en sum av en konstant verdi $a_0/2$ og sinus- og cosinusfunksjoner med amplituder a_n og b_n og med perioder som minker regelmessig som $2\pi, 2\pi/2, 2\pi/3, 2\pi/4, \ldots$. Arbeidet med å finne fourierkoeffisientene består i å utføre en serie bestemte integraler fra $-\pi$ til $+\pi$ integraler, to integraler for hver *n*=1, 2, 3, ... Dette kan virke uoverkommelig, men med greie funksjoner f og formler for integraler av trigonometriske uttrykk er det godt mulig. Det er greit nok å finne slike integraler tilnærmet med kalkulator, men vi ønsker også resultatet som et sumuttrykk, på *eksakt* form.

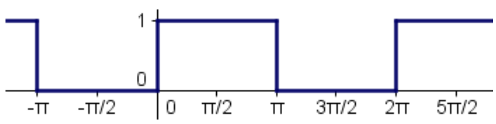
Koeffisienten a_0 er lik arealet mellom *x*-akse og grafen til funksjonen delt på π , det vil si *det dobbelte av middelverdien til funksjonen* over en periode.

En stykkevis kontinuerlig funksjon har sprang i grafen angitt på en eller annen måte i funksjonsuttrykket. Fourierrekka til funksjonen vil gi en funksjonsverdi ved slike sprang lik verdien midt mellom sprangpunktene – her kan vi ha formell ulikhet mellom en funksjon og dens rekke.

Eksempel 2

Finn fourierrekka til $f(x)=\begin{cases}0 & for \quad -\pi<x\leq 0\\ 1 & for \quad 0<x\leq\pi\end{cases}$, $f(x)=f(x+2\pi)$

Grafen til funksjonen er



Vi 'ser på øyemål' at $\frac{a_0}{2}=(\pi\cdot 1)/(2\pi)=1/2$, men det må vi beregne etter definisjonen,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{\pi} 1\,dx\right)=\frac{1}{\pi}[x]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}(\pi-0)=1$$

Koeffisientene a_n beregnes med *n* som parameter,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos(nx)\,dx+\int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos(nx)\,dx\right)\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}(-\sin(nx))\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}(0-0)=0\end{aligned}$$

Koeffisientene b_n beregnes med *n* som parameter,

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin(nx)\,dx+\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin(nx)\,dx\right)\\&=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{n\pi}(\cos(n\pi)-1)\end{aligned}$$

Setter vi så *n*=1, 2, 3, 4, ... vil vi finne at verdiene for b_n blir

$$b_n=\frac{2}{\pi},0,\frac{2}{3\pi},0,\frac{2}{5\pi},0,\frac{2}{7\pi},\ldots=\frac{2}{(2n-1)\pi}\quad,\quad n=1,2,3,\ldots$$

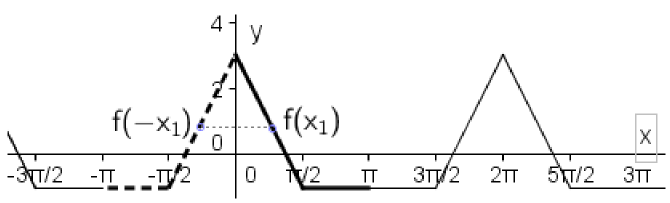
Fourierrekka alt i alt:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\\&=\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{(2m-1)\pi}\sin((2m-1)x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\sin((2m-1)x)\end{aligned}$$

Integrajonsintervallet velges slik at det dekker en periode av funksjonen. Det mest praktiske er fra $-\pi$ til π , andre grenser vil gi samme resultat. I praksis vil det si at vi tilpasser funksjonen som skal rekkeutvikles slik at vi kan utnytte symmetriegenskaper og forenkle integrasjonsarbeidet.

Like og odde periodiske funksjoner

En *like* funksjon er symmetrisk om *y*-aksen, $f(x)=f(-x)$. Det betyr at vi kan integrere over halve perioden – og fourierrekka vil få bare cosinusledd, a_n i tillegg til a_0 .

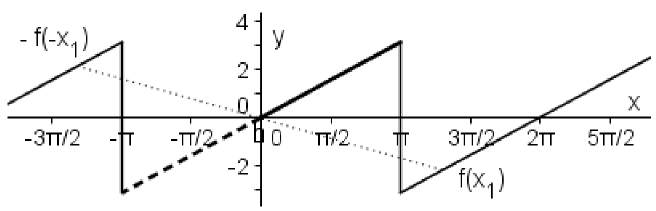


Bare a_0 og cosinus-ledd, a_n,
integrerer over halve perioden.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

En odde funksjon er symmetrisk om origo, $f(x)=-f(-x)$. Det betyr at vi kan integrere over halve perioden – og fourierrekka vil få bare sinusledd, b_n .



Bare sinus-ledd b_n,
integrerer over halve perioden.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Funksjonen i Eksempel 2 har ingen symmetri etter definisjonene, men ved hjelp av en regel kan vi bruke symmetriprinsippet,

> Fourierkoeffisientene til en sum av to funksjoner, $f(x)+g(x)$,
> er summen av de tilhørende koeffisientene til f og g .
>
> Fourierkoeffisientene til $c \cdot f(x)$ er c ganger koeffisientene for $f(x)$.

Den første av reglene gjør at funksjonen

$$f(x)=\begin{cases} 0 & for \quad -\pi < x \le 0 \\ 1 & for \quad 0 < x \le \pi \end{cases} \quad , \quad f(x)=f(x+2\pi)$$

kan settes sammen slik, $f(x)=\frac{1}{2}+g(x)$, der vi kan beregne $g(x)$ med origosymmetri.

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & for \quad -\pi < x \le 0 \\ -\frac{1}{2} & for \quad 0 < x \le \pi \end{cases} \quad , \quad f(x)=f(x+2\pi)$$

Tar også med en regel som dreier seg om produktet av like og odde funksjoner,

> Produktet av en *like* og en *like* funksjon blir en ny *like* funksjon.
> Produktet av en *odde* og en *odde* funksjon blir en ny *like* funksjon.
> Produktet av en *like* og en *odde* funksjon blir en ny *odde* funksjon.

Periodiske funksjoner med T = 2 L

Til nå har vi sett på funksjoner med en grei periode, $[-\pi, \pi>$. Her er den generelle definisjonen:

Definisjon

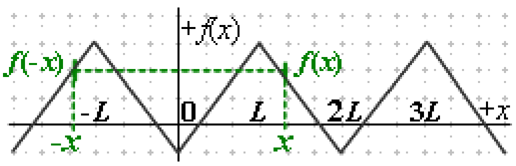
Fourierrekka til en stykkevis kontinuerlig funksjon f på intervallet $[-L, L>$ er

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_1\cos(\frac{\pi}{L}x)+\boldsymbol{b}_1\sin(\frac{\pi}{L}x)+\boldsymbol{a}_2\cos(\frac{2\pi}{L}x)+\boldsymbol{b}_2\sin(\frac{2\pi}{L}x)+\boldsymbol{a}_3\cos(\frac{3\pi}{L}x)+\boldsymbol{b}_3\sin(\frac{3\pi}{L}x)+\ldots$$
$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\boldsymbol{a}_n\cos(\frac{n\pi}{L}x)+\boldsymbol{b}_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)\right)$$

der *fourierkoeffisientene* beregnes slik for *n*=1,2,3,... ,

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \qquad \boldsymbol{a}_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx \qquad \boldsymbol{b}_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx$$

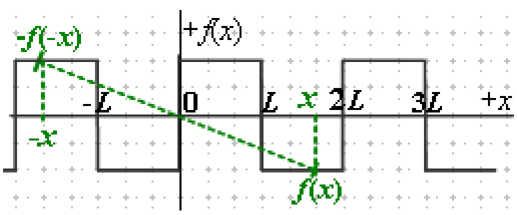
Like funksjoner med periode *T* = 2 *L* - *y*-akse symmetri



Like funksjon: $f(x)=f(-x)$
Bare a_0 og cosinus-ledd, a_n,
integrerer over halve perioden.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx$$

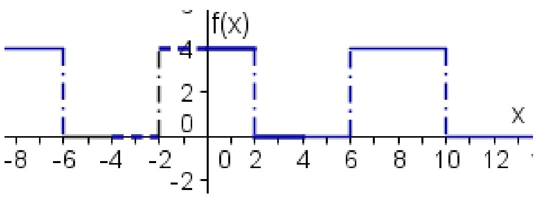
Odde funksjoner med periode *T* = 2 *L* - origo symmetri



Odde funksjon: $f(x)=-f(-x)$
Bare sinus-ledd, b_n,
integrerer over halve perioden.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx$$

Eksempel 3



Finn fourierrekka til

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{for} \quad -4<x\le -2\\ 4 & \text{for} \quad -2<x\le 2\\ 0 & \text{for} \quad 2<x\le 4\end{cases}$$

$$f(x)=f(x+8)$$

Funksjonen er periodisk med $T=2L=2\cdot 4$ og symmetrisk om y-akse med en middelverdi som lar seg beregne ut fra enkel geometri,

$$a_0=2\frac{0\cdot 4+4\cdot 4}{8}=4 \quad .$$

Koeffisientene a_n finnes av integralet

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\frac{2}{4}\int_0^4 f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{4}x\right)dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^2 4\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{4}x\right)dx+\frac{1}{2}\int_2^4 0\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{4}x\right)dx\\&=2\int_0^2\cos\left(\frac{n\pi}{4}x\right)dx=\frac{8}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cdot\sin\left(\frac{\pi n x}{4}\right)\right]_0^2=\frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Her tar vi fordel av at $\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)=1,0,-1,0,1,0,\ldots$ $[=0 \text{ for } n=\text{partall}]$ og fortsetter,

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$\frac{1}{n}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$	$\frac{1}{1}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{7}$	...

Alt i alt, fourierrekka blir

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{8}{\pi}\left[\frac{1}{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)+\frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right)-\frac{1}{7}\cos\left(\frac{7\pi}{2}x\right)+\ldots\right]\\&=2+\frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}\cos\left((2m-1)\frac{\pi}{2}x\right)\end{aligned}$$

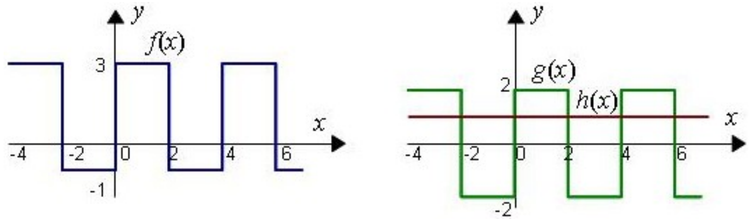
∃

Sum av funksjoner, parallellforskyvning

Symmetriegenskapene til like og odde funksjoner gir oss grovt sagt halvering av regnearbeidet. Noen funksjoner kan omformes til å vise symmetriegenskaper hvis vi bruker denne regelen,

> Fourierkoeffisientene til en sum $g(x)+h(x)$ er summen av de samhørende koeffisientene til $g(x)$ og $h(x)$.

Eksempel 4



Funksjonen $f(x)$ er gitt som

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{for} \quad -2<x\leq 0\\ 3 & \text{for} \quad 0<x\leq 2\end{cases} \qquad f(x)=f(x+4)$$

Middelverdien beregnes til $a_0/2=1$ - av formel eller som her ved å se på gjennomsnittshøyde.

Vi kan tenke oss $f(x)$ satt sammen som sum av funksjonene

$$g(x)=\begin{cases}-2 & \text{for} \quad -2<x\leq 0\\ 2 & \text{for} \quad 0<x\leq 2\end{cases} \qquad f(x)=f(x+4)$$

$$h(x)=\begin{cases}1 & \text{for} \quad -2<x\leq 0\\ 1 & \text{for} \quad 0<x\leq 2\end{cases} \qquad f(x)=f(x+4) \qquad \text{(alt. } h(x)=1 \text{)}$$

og finne fourierkoeffisientene for begge.

Regnearbeidet blir nå enklere enn om vi gikk løs på $f(x)$ som ikke har noen av de formelle symmetriegenskapene, men $g(x)$ og $h(x)$ har begge symmetriegenskaper.

Funksjonen $g(x)$ har ei fourierrekke som bare består av konstantleddet $a_0=2$.

Funksjonen $h(x)$ har ei fourierrekke med bare b_n -koeffisienter fordi funksjonen viser origosymmetri,

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\frac{2}{2}\int_0^2 2\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$$

$$=-\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}x\right]_0^2=-\frac{4}{n\pi}(\cos(n\pi)-1)$$

$$b_n=\{\frac{8}{\pi},\ \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{3},\ \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{5},\ \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{7},\ldots\} \qquad \text{for } n=1,3,5,7,\ldots$$

Fourierrekka blir

$$f(x)=1+\frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m-1}\sin\left(\frac{m\pi}{2}x\right) \qquad \text{for } m=1,2,3,4,\ldots$$

Trigonometriske triks

I mange tilfeller er delvis integrasjon nødvendig, for eksempel for å finne $\int x\cdot\cos(nx)\,dx$,

$$\int u\cdot v' = u\cdot v - \int u'\cdot v \quad \text{, setter } \begin{bmatrix} u = x \\ v' = \cos(nx) \end{bmatrix} \quad \text{som gir} \quad \begin{bmatrix} u' = 1 \\ v = \frac{1}{n}\sin(nx) \end{bmatrix}$$

$$\int x\cdot\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n}x\sin(nx) - \int 1\cdot\frac{1}{n}\sin(nx)\,dx = \frac{1}{n}x\sin(nx) + \frac{1}{n^2}x\cos(nx) + C$$

Her er noen formler som forenkler regnearbeidet med fourierrekker.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx = 0 \qquad \text{hvis } m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx = \pi \qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx = \pi \qquad \text{hvis } m = n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nx\,dx = 0 \qquad \text{for alle } m \text{ og } n$$

$$\int x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{n^2}\sin nx - \frac{x}{n}\cos nx \qquad \int x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n^2}\cos nx + \frac{x}{n}\sin nx$$

$$\int x\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{L^2}{\pi^2 n^2}\sin(\frac{n\pi}{L}x) - \frac{L}{\pi n}\cdot x\cdot\cos(\frac{n\pi}{L}x)$$

$$\int x\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{L^2}{\pi^2 n^2}\cos(\frac{n\pi}{L}x) + \frac{L}{\pi n}\cdot x\cdot\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

$$\cos(mx + nx) = \cos mx\cdot\cos nx - \sin mx\cdot\sin nx$$
$$\cos(mx - nx) = \cos mx\cdot\cos nx + \sin mx\cdot\sin nx$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \qquad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(0) = \sin(\pi) = \sin(2\pi) = \sin(3\pi) = \ldots = 0$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = \cos(\frac{5\pi}{2}) = \ldots = 0$$

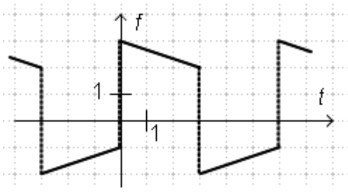
Med n som heltall 0,1,2,3,...

$$\sin(n\pi) = \sin(-n\pi) = 0$$
$$\sin(\frac{n\pi}{2}) = 1, 0, -1, 0, 1, \ldots \quad [=0 \text{ for } n = \text{partall} \quad = \pm 1 \text{ for } n = \text{oddetall}]$$

$$\cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = (-1)^n$$
$$\cos(\frac{n\pi}{2}) = 0, -1, 0, 1, 0, \ldots \quad [=0 \text{ for } n = \text{oddetall} \quad = \pm 1 \text{ for } n = \text{partall}]$$

MATLAB tar saken

Symbolic Toolbox i MATLAB kan brukes til å finne koeffisientene i fourierrekker. Her er en m-fil som er laget for funksjonen



$$f(t)=\begin{cases}-1+x/3 & -3\,t\leq 0\\ 3-x/3 & 0<t\leq 3\end{cases}\qquad f(t+6)=f(t)$$

men den kan brukes generelt ved å redigere funksjonsuttrykkene og andre intervallgrenser.

```
syms t; PI=sym(pi);
f1=-1+t/3; f2=3-t/3; L=3; n=1:1:7;
a0= 1/L*(int(f1, t, -3, 0) + int(f2, t, 0, 3))
an= 1/L*(int(f1*cos(n*PI/L*t), t, -L, 0) + int(f2*cos(n*PI/L*t), t, 0, L))
bn= 1/L*(int(f1*sin(n*PI/L*t), t, -L, 0) + int(f2*sin(n*PI/L*t), t, 0, L))
```

Kort forklart,

```
syms t; PI=sym(pi);
```

Her defineres en symbolsk variabel t som brukes til integrasjonsvariabel (tid). Kunne like godt ha kalt denne x. Den neste kommandoen er litt spesiell kanskje, her gis π det alternative navnet PI – og ved å spesifisere sym(pi) vil vi unngå at MATLAB bruker den numeriske verdien 3.14.. i resultatene.

```
f1=-1+t/3; f2=3-t/3; L=3; n=1:1:7;
```

Den funksjonen vi skal finne rekka for er vanligvis delt opp i to (eller flere) intervaller, i dette eksemplet f1=-1+t/3 for -3<*t*<0 og f2=3-t/3 3 for 0<t<3. Her setter du altså inn aktuelle funksjonsuttrykk. Kommandoen n=1:1:7 lager en vektor (tabell) med verdier 1,2,3,..7 som brukes i beregningene av koeffisientene. Med 7 *n*-verdier vil vi vanligvis ha nok ledd til å se hvordan de kan uttrykkes under ett i et sumuttrykk.

```
a0= 1/L*(int(f1, t, -L, 0) + int(f2, t, 0, L))
```

Dobbelmiddelverdi beregnes. I dette tilfellet 'ser vi lett at' ut fra figuren at middelverdien er 1.

```
an= 1/L*(int(f1*cos(n*PI/L*t), t, -L, 0) + int(f2*cos(n*PI/L*t), t, 0, L))
```

Koeffisientene foran cossinusleddene beregnes, her blir det gjort 7 beregninger, for *n*=1...7, og de 7 resultatene leges i vektoren an.

```
bn= 1/L*(int(f1*sin(n*PI/L*t), t, -L, 0) + int(f2*sin(n*PI/L*t), t, 0, L))
```

Koeffisientene foran sinusleddene beregnes, de 7 resultatene leges i vektoren bn.

Resultatet av beregningene blir vist slik:

```
a0 =   1
an =   [ 4/pi^2, 0, 4/(9*pi^2), 0, 4/(25*pi^2), 0, 4/(49*pi^2)]
bn =   [ 8/pi, 0, 8/(3*pi), 0, 8/(5*pi), 0, 8/(7*pi)]
```

MATLAB viser resultater som enlinjet tekst og ikke i 2D som vi er vant til,

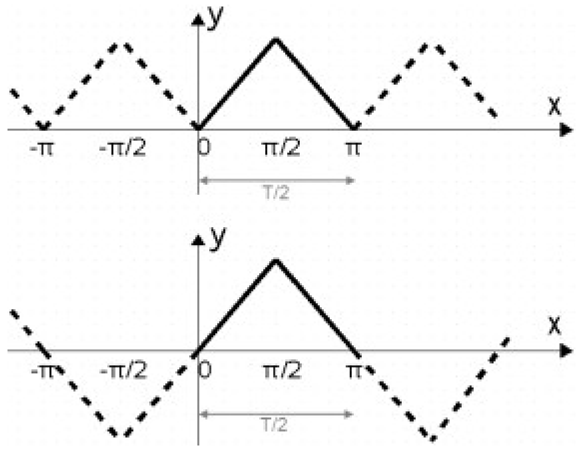
$$a_n=\{\frac{4}{\pi^2},0,\frac{4}{9\pi^2},0,\frac{4}{25\pi^2},0,\frac{4}{49\pi^2},\ldots\}\qquad a_n=\frac{4}{(2m-1)^2\pi^2}\qquad m=1,2,3,\ldots$$

$$b_n=\{\frac{8}{\pi},0,\frac{8}{3\pi},0,\frac{8}{5\pi},0,\frac{8}{7\pi}\}\qquad b_n=\frac{8}{(2m-1)\pi}\qquad m=1,2,3,\ldots$$

og fourierrekka blir

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2\pi}\cos((2m-1)\frac{\pi}{3}t)+\frac{2}{2m-1}\sin((2m-1)\frac{\pi}{3}t)\qquad m=1,2,3,\ldots$$

Halvperiodiske utvidelser



Hvis en funksjon bare er gitt i et intervall, $0 - T/2$, kan det settes opp halvperiodiske utvidelser avfunksjonen, enten til en jevn funksjon eller til en odde funksjon.
Disse utvidelsene kan brukes til å forenkle løsninger av partielle differensiallikninger.

Fourierrekker på 1-2-3

Finn halv-periode bredde, $L=\frac{P}{2}$, ut fra funksjonens definisjonsmengde.

Finn funksjonens symmetriegenskaper, det kan være

(1) Like funksjon, symmetri om y-aksen, $f(x)=f(-x)$ $\boldsymbol{a_0}$ og $\boldsymbol{a_n}$ skal beregnes

(2) Odde funksjon, symmetri om origo, $f(x)=-f(-x)$ $\boldsymbol{b_n}$ skal beregnes

(3) Ingen symmetri, $\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{a_n}$ og $\boldsymbol{b_n}$ skal beregnes

(1) $\boldsymbol{a_0}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$ $\quad\boldsymbol{a_n}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx$

(2) $\boldsymbol{b_n}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$

(3) $\boldsymbol{a_0}=\frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)dx$ $\quad\boldsymbol{a_n}=\frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\cdot\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx$ $\quad\boldsymbol{b_n}=\frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\cdot\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$

Sett inn for *n* = 1, 2, 3, 4, ... i uttrykkene for $\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{a_n}$ og $\boldsymbol{b_n}$ som ble funnet i (1), (2) eller (3) og finn deretter et generelt uttrykk med *n* som variabel for leddene.

Skriv opp fourierrekkene for tilfellene (1), (2) eller (3), sett inn for a_0, a_n og b_n

(1) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a_0}+\boldsymbol{a_1}\cos(\frac{\pi}{L}x)+\boldsymbol{a_2}\cos(\frac{2\pi}{L}x)+\boldsymbol{a_3}\cos(\frac{3\pi}{L}x)+\ldots = \frac{1}{2}\boldsymbol{a_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{a_n}\cos(\frac{n\pi}{L}x)$

(2) $\boldsymbol{b_1}\sin(\frac{\pi}{L}x)+\boldsymbol{b_2}\sin(\frac{2\pi}{L}x)+\boldsymbol{b_3}\sin(\frac{3\pi}{L}x)+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{b_n}\sin(\frac{n\pi}{L}x)$

(3)
$$\frac{1}{2}\boldsymbol{a_0}+\boldsymbol{a_1}\cos(\frac{\pi}{L}x)+\boldsymbol{a_2}\cos(\frac{2\pi}{L}x)+\boldsymbol{a_3}\cos(\frac{3\pi}{L}x)+\boldsymbol{a_4}\cos(\frac{4\pi}{L}x)+\ldots$$
$$+\boldsymbol{b_1}\sin(\frac{\pi}{L}x)+\boldsymbol{b_2}\sin(\frac{2\pi}{L}x)+\boldsymbol{b_3}\sin(\frac{3\pi}{L}x)+\boldsymbol{b_4}\sin(\frac{4\pi}{L}x)+\ldots$$
$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{a_n}\cos(\frac{n\pi}{L}x)+\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{b_n}\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

$$\int\sin(Anx)dx=-\frac{1}{An}\cos(Anx) \qquad \int x\cdot\sin(Anx)dx=\frac{1}{A^2n^2}\sin(Anx)-\frac{1}{An}x\cos(Anx)$$

$$\int\cos(Anx)dx=\frac{1}{An}\sin(Anx) \qquad \int x\cdot\cos(Anx)dx=\frac{1}{A^2n^2}\cos(Anx)+\frac{1}{An}x\sin(Anx)$$

$\sin(n\pi)=0$ $\qquad\sin(\frac{n\pi}{2})=1,0,-1,0,1,\ldots$ [=0 for n=partall =±1 for n=oddetall]

$\cos(n\pi)=(-1)^n$ $\qquad\cos(\frac{n\pi}{2})=0,-1,0,1,0,\ldots$ [=0 for n=oddetall =±1 for n=partall]