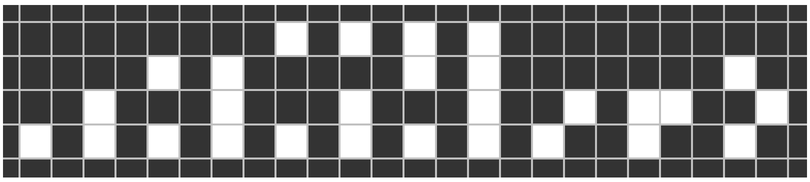
Ma2_Logikk

http://ansatte.hin.no/tg
07.03.2012 09:41



Innhold

Logikk..3
Utsagnslogikk..3
Logiske operasjoner..4
Logiske regneregler..7
Implikasjon..9
Biimplikasjon..13
Operatorpresedens..15
Alle logiske operasjoner med to variable..15
Argumenter og bevis..16
Slutningsregler..17
Direkte bevis..18
Indirekte bevis..19
Induksjonsbevis..22
Oppgaver..27
Vedlegg – Logikk oppsummering..32

Logikk

Utsagnslogikk

Utsagnslogikk handler om setninger som uttrykker en sannhet eller usannhet og hvordan de kan kombineres til å danne nye sammensatte logiske utsagn.

Et logisk utsagn er en setning som enten er en sannhet eller en usannhet. Det er mulig å avgjøre om sannhetsverdien er sann eller falsk, *S* eller *F*. Utsagn kan kombineres med matematisk logikk til å lage presise formuleringer, logiske resonnementer og bevis.

Her er noen eksempler på utsagn,

"Vinteren kommer"	(sannhetsverdi = *S*)
"2 + 2 = 4"	(sannhetsverdi = *S*)
"2 + 2 = 5"	(sannhetsverdi = *F*)
"π er et heltall"	(sannhetsverdi = *F*)
"kuer er fugler"	(sannhetsverdi = *F*)
"biler forurenser"	(sannhetsverdi = *S*)
"Adam + Eva = Sant"	(sannhetsverdi = usikker?)

Logikk dreier seg altså om utsagn med sannhetsverdi *S* eller *F*, men ikke om hvordan et utsagn har fått sin sannhetsverdi.

Enkelte setninger kan minne om utsagn, men har ingenting med logikk å gjøre,

"God dag!"
"Hvilken dag er det i dag?"
"Dette utsagnet er sant."
"Jeg er en løgner"

De to siste setningene kan like gjerne være sann som falsk siden de refererer til seg selv. Vi kaller de ikke et utsagn i logisk forstand.

De logiske verdiene *sann* og *falsk* blir i dette kurset representert med symbolene S og F. I mange tekniske sammenhenger er det vanlig å bruke sifrene 1 og 0 til å bety det samme.

Noen utsagn uttrykkes med en størrelse som avgjør om det er sant eller usant, dette kalles gjerne åpne utsagn:

"telleren er delelig med 7"	(kommer an på verdien av *telleren*)
"x^2 = 4"	(sannhetsverdi = *S* hvis $x = \pm 2$, ellers F)
"$x > -x$"	(*S* for $x > 0$)

Åpne utsagn kan uttrykkes som logiske funksjoner av variabelen som avgjør sannhetsverdien, for eksempel $p(t) = 't \text{ er delelig med } 7'$ eller $q(x) = '-2 < x < 3'$ der det kommer an på de aktuelle verdiene av *t* og *x* hva sannhetsverdiene av utsagnene skal bli.

Det er vanlig å bruke enkeltbokstaver til å erstatte et utsagn, for eksempel kan vi si at *p*="poteter er bær" og *q*="kuer er fugler", og så lage logiske uttrykk med *p* og *q* i stedet for de komplette setningene. I vanlig matematikk gjør vi det samme med for eksempel *h* og *b* i stedet for høyde og bredde av et rektangel.

Logiske operasjoner

Logiske utsagn kan kombineres og danne nye utsagn etter logiske 'regneregler'. Vi lager logiske regnestykker der primærutsagn kombineres med logiske operatorer (konnektiver) til et sammensatt utsagn. Sannhetstabeller brukes til å vise definisjonene av operatorer og resultatet av sammensatte utsagn for hver enkelt verdikombinasjon av primærutsagn. En tabell for *n* primærutsagn har 2^n kolonner for inngangsverdiene.

Logisk IKKE - negasjon

Vi sier at utsagnet $\overline{p}$ (leses *ikke p*) er sant hvis utsagnet *p* er falskt, og det er falskt hvis utsagnet *p* er sant. Definisjonen kan også settes opp som sannhetstabell,

p	$\overline{p}$
S	F
F	S

Den logiske IKKE-operatoren snur sannhetsverdien til det logisk motsatte, $\overline{S}=U$ og $S=\overline{U}$. Hvis vi finner $\overline{q}$ i et uttrykk kan vi ikke si at $\overline{q}$ er sann eller falsk, bare at $\overline{q}$ har logisk motsatt verdi av q . I mange lærebøker brukes symbolet ¬ som negasjonsoperator slik at ¬*p* er det samme som $\overline{p}$.

Eksempel 1

$p='2+2=4'$ $\qquad \overline{p}='2+2\neq4'$

$p='x=0'$ $\qquad \overline{p}='x\neq0'$

$w='x\geq5'$ $\qquad \overline{w}='x<5'$

$q='\text{kuer er fugler}'$ $\qquad \overline{q}='\text{kuer er ikke fugler}'$

$s='\text{Alle kan synge}'$ $\qquad \overline{s}='\text{Ikke alle kan synge}'\ \ evt\ \ '\text{Noen kan synge}'$

$e='\text{Ingen er feilfri}'$ $\qquad \overline{e}='\text{Det er noen som feiler}'$ Ǝ

De to siste tilfellene er basert på utsagn om alle eller ingen. I logisk forstand er negasjonen av et utsagn ikke nødvendigvis det motsatte i språklig forstand, men en formulering som uttrykker benektelse av det første. En grei måte å uttrykke negasjonen til et formulert utsagn er å starte med 'det er ikke slik at'. Det siste eksemplet gir da $\overline{e}='\text{Det er ikke slik at ingen er feilfri}'$.

Logisk OG - konjunksjon

Vi sier at det sammensatte utsagnet $p \wedge q$ (leses *p og q*) er sann hvis både utsagn *p* og utsagn *q* begge er sanne – og falsk ellers. To uavhengige utsagn *p* og *q* gir 4 kombinasjoner av sannhetsverdier slik tabellen lister opp. Her er sannhetstabellen for OG-operatoren:

p	q	$p \wedge q$
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	F

Eksempel 2

$p='2+2=4'$ $\quad q='\text{kuer er husdyr}'$ $\qquad p\wedge q = '2+2=4'\ OG\ '\text{Kuer er husdyr}'=S$

$e='2+2=4'$ $\quad f='1=-1'$ $\qquad e\wedge f = \text{sann}\ OG\ \text{usann} = \text{usann}$

$m='2+2=4'$ $\quad n='1=0'$ $\qquad m\wedge\overline{n} = \text{sann}\ OG\ \overline{\text{usann}}=\text{sann}$

$a='0<x'$ $\quad b='x<7'$ $\qquad a\wedge b = '(0<x)\wedge(x<7)'$ Åpent utsagn i *x*. Ǝ

Logisk ELLER - disjunksjon

Vi sier at det sammensatte utsagnet $p \vee q$ (leses *p eller q*) er sann hvis i det minste ett av de to utsagnene *p* eller *q* er sann – og falsk hvis begge er falske. Sannhetstabellen for ELLER-operatoren er:

p	q	$p \vee q$
S	S	S
S	F	S
F	S	S
F	F	F

Eksempel 3

$p='2+2=4'$ $\quad q='\text{kuer er husdyr}'$ $\qquad p\vee q=S$

$a='2+2=4'$ $\quad b='1=-1'$ $\qquad a\vee b=S$

$u='2+2=4'$ $\quad v='1=-1'$ $\qquad \overline{u}\vee v=U$ Ǝ

Det er to typer logisk ELLER. Sannhetstabellen ovenfor viser at det er tre muligheter som gir sann verdi for *p*∨*q*:

p=S og *q=S*
p=S og *q=F*
p=F og *q=S* .

Dette kalles *inklusiv* eller – også kalt det *vide* eller. Med *eksklusiv* eller (*trange* eller) mener vi å utelukke både-og-tilfellet *p=S & q=S* fra å gi verdien *S.* Eksklusiv eller bruker $\oplus$:

p	q	$p \oplus q$
S	S	F
S	F	S
F	S	S
F	F	F

I dagligtalen brukes begrepet *eller* som regel forskjellig fra i logikken. Utsagnet 'jeg får ros eller jeg får ris' legger opp til at jeg får enten ros eller ris, men i logisk forstand det inkluderer også tilfellet at jeg får både ros og ris.

Et sammensatt logisk uttrykk kan negeres, det negerte av *p*∨*q* skrives som $\overline{p\vee q}$ og har slik opplisting i en sannhetstabell, med en kolonne for mellomresultatet $p\vee q$:

p	q	$p \vee q$	$\overline{p\vee q}$
S	S	S	F
S	F	S	F
F	S	S	F
F	F	F	S

Matematikken har innebygget logikk i måten å angi størrelsesforhold. Et uttrykk som $'x<2' \vee 'x=2'$ skrives i ett som $'x \leq 2'$, og det sammensatte uttrykket $'0<x \leq 3'$ kan er satt sammen av $'0<x' \wedge ('x<3' \vee 'x=3')$.

Eksempel 4

Sett $a='3<x'$, $b='x<5'$ og $c='x=5'$.

a) Finn resultatene av $b \vee c$, $a \wedge b$ og $a \vee b \wedge c$ når $x=3$.

Svar: $b \vee c='3<5' \vee '3=5'=S \vee F=\underline{\underline{S}}$ $\qquad a \wedge b='3<3' \wedge '3<5'=F \wedge S=\underline{\underline{F}}$

$a \vee b \wedge c='3<3' \vee ('3<5' \wedge '3=5')=F \vee (S \wedge F)=F \vee F=\underline{\underline{F}}$

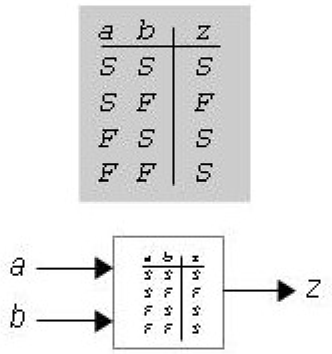
b) Finn resultatene av $b \vee c$, $a \wedge b$ og $a \wedge b \vee c$ når $x=5$.

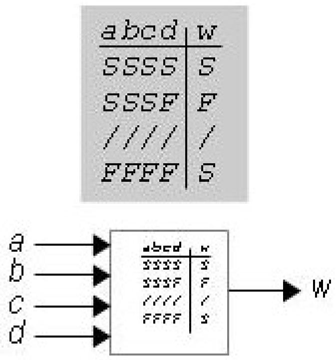
Svar: $b \vee c='5<5' \vee '5=5'=F \vee S=\underline{\underline{S}}$ $\qquad a \wedge b='3<5' \wedge '5<5'=S \wedge F=\underline{\underline{F}}$

$a \vee b \wedge c='3<5' \vee ('5<5' \wedge '5=5')=S \vee (F \wedge S)=S \vee F=\underline{\underline{S}}$

Sannhetstabeller

Logiske utsagn har altså en av to mulige verdier, enten sann eller falsk. Et sammensatt utsagn som omfatter 2 basisutsagn *a* og *b* kan settes sammen med logiske operatorer – eller i en tabell som på inngangssiden har kolonner med alle mulige logiske kombinasjoner av 2 utsagn – og som viser hva hver enkelt kombinasjon gir som logisk verdi i utgangskolonnen. Med *n* logiske inngangsvariable vil vi få 2^n rader i tabellen. Sannhetstabeller uttrykker 'løsningen' på et logisk problem der vi ser hva hver enkelt inngangskombinasjon gir som resultat.





En tabell for 4 inngangsvariable har $2^4=16$ inngangskombinasjoner og blir i største laget for papir og blyant, men hvis vi roterer tabellen og leser loddrett blir det ikke så uoversiktlig,

a:	S	S	S	S	S	S	S	S	F	F	F	F	F	F	F	F
b:	S	S	S	S	F	F	F	F	S	S	S	S	F	F	F	F
c:	S	S	F	F	S	S	F	F	S	S	F	F	S	S	F	F
d:	S	F	S	F	S	F	S	F	S	F	S	F	S	F	S	F
w:	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_

Sannhetstabeller brukes til å sjekke resultatene av logiske sammensatte uttrykk eller rett og slett til å beskrive hvilken 'logikk' som skal utføres med et sett inngangsvariable. Ved hjelp av logiske operatorer kan alle sannhetstabeller erstattes med sammensatte logiske uttrykk med operatorene IKKE, OG og ELLER.

Ekvivalens, tautologi, kontradiksjon

To sammensatte utsagn *a* og *b* er *ekvivalente* (har samme verdi) hvis de har identiske sannhetstabeller, vi bruker dobbelpil til å vise dette, $a \Leftrightarrow b$.

En *tautologi*, $\tau = SANN$, er et logisk uttrykk som alltid er sann, uansett hvilke sannhetsverdier utsagnsvariablene har. Eksempel $p \vee \overline{p} \Leftrightarrow \tau$, $\overline{r \wedge \overline{r}} \Leftrightarrow \tau$.

En *kontradiksjon*, eller selvmotsigelse, $\sigma = FALSK$, er et logisk uttrykk som alltid er falsk, uansett hvilke sannhetsverdier utsagnsvariablene har. Eksempel $p \wedge \overline{p} \Leftrightarrow \sigma$, $\overline{r \vee \overline{r}} \Leftrightarrow \sigma$.

Et sammensatt utsagn kan ende opp med å bli en tautologi eller en kontradiksjon, uavhengig av primærutsagnene.

Logiske regneregler

Sammensatte logiske uttrykk kan omformes og forenkles etter lover for logiske likheter,

Kommutative lover	$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	(1)
Assosiative lover	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	(2)
Distributive lover	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(3)
De Morgans lover	$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$	(4)
Idempotente lover	$p \vee p \Leftrightarrow p$	$q \wedge q \Leftrightarrow q$	(5)
Identitetslover	$p \vee \sigma = p$	$q \wedge \tau = q$	(6)
Domineringslover	$p \vee \tau = \tau$	$q \wedge \sigma = \sigma$	(7)
Dobbel negasjon	$\overline{\overline{p}} = p$	$q = \overline{\overline{q}}$	(8)

De logiske operatorene har presedens i forhold til hverandre i rekkefølge IKKE, OG, ELLER. I tillegg kan vi bruke parenteser for å styre evalueringen av uttrykk. Følgende to uttrykk er ikke logiske ekvivalente,

$p \vee q \wedge r$ (Her blir $q \wedge r$ evaluert før ELLER-operasjonen med *p*)

$(p \vee q) \wedge r$ (Her evalueres $p \vee q$ før OG-operasjonen med *r*)

Lovene ovenfor kan bevises med sannhetstabeller, for eksempel for (3):

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
S	S	S	S	S	S	S	S
S	S	F	F	S	S	S	S
S	F	S	F	S	S	S	S
S	F	F	F	S	S	S	S
F	S	S	S	S	S	S	S
F	S	F	F	F	S	F	F
F	F	S	F	F	F	S	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Sannhetstabellen har 3 kolonner for primærutsagn, det gir $2^3 = 8$ rader for kombinasjonsmuligheter. De 3 øvrige lyse grå kolonnene er for delresultater. De to mørke grå kolonnene er resultatet av venstre og høyre side av regel (3) - de er identiske og dermed er lov (3) bevist.

Eksempel 5

Vis at uttrykket $\overline{p\wedge(\overline{p}\vee q)}$ kan gjøres enklere.

Starter med uttrykket i parentesen og omformer etter De Morgans lov, $\overline{p\wedge(\overline{p}\vee\overline{\overline{q}})}=\overline{p\wedge(\overline{p\wedge\overline{q}})}$

Bruker De Morgans lov en gang til, $\overline{p\wedge(\overline{p\wedge\overline{q}})}=\overline{p}\vee(p\wedge\overline{q})$

Bruker distributiv lov, $\overline{p}\vee(p\wedge\overline{q})=(\overline{p}\vee p)\wedge(\overline{p}\vee\overline{q})=\boldsymbol{S}\wedge(\overline{p}\vee\overline{q})=\overline{p}\vee\overline{q}=\overline{p\wedge q}$ Ǝ

Eksempel 6

En tenåring har alder som slutter på 'ten'. Med alder x som variabel vil kunne sette opp,

$b(x)=x<13$ (barn har alder mindre enn 13)

$v(x)=x>19$ (voksen har alder større enn 19)

$t(x)=\overline{b(x)}\wedge\overline{v(x)}$ (tenåringer er ikke barn og samtidig ikke voksne)

Vi skal bestemme sannhetsverdiene for $t(7)$ og $t(17)$,

$$t(7)=\overline{b(7)}\wedge\overline{v(7)}=\overline{7<13}\wedge\overline{7>19}=\overline{S}\wedge\overline{U}=U\wedge S=U$$

$$t(17)=\overline{b(17)}\wedge\overline{v(17)}=\overline{17<13}\wedge\overline{17>19}=\overline{U}\wedge\overline{U}=S\wedge S=S$$

Som alternativ til uttrykket $t(x)=\overline{b(x)}\wedge\overline{v(x)}$ kunne vi ha bruke Morgans lov til å sette opp $t(x)=\overline{b(x)\vee v(x)}$ og evaluere dette. Prøv! Ǝ

Logisk kinokveld

En kinokveld er mulig hvis du har nok penger og dessuten hvis du ikke har hjemmelekser. I skriverier om logikk brukes ofte bokstavene *p* og *q* til å beskrive logiske variable (på samme måte som *x* og *y* i algebra). Her velger jeg å bruke bokstavene *k*, *p* og *h* til å holde verdiene av 'kinokveld', 'har penger' og 'har hjemmelekser',

k = "det blir kinokveld"

p = "jeg har penger nok til kino"

h = "jeg har hjemmelekser"

I vårt logiske problem er det verdiene av *p* og *h* som avgjør verdien av *k*. Vi sier at k er den avhengige variable og *p* og *h* uavhengige logiske variabler.

Med logiske operatorer kan vis sette dette opp slik:

$k=p\wedge\overline{h}$ *k* er lik (*p* og ikke *h*)

En sannhetstabell for kinoproblemet blir slik,

p	h	$\overline{h}$	$p\wedge\overline{h}$
S	S	F	F
S	F	S	S
F	S	F	F
F	F	S	F

Det viser seg at du er blakk, og må spørre mor og far om finansiering, men som den luringen du er spør du begge uavhengig av hverandre(!). Vi innfører de logiske variablene *m* og *f* til å holde verdiene av 'mor sponser' og 'far sponser'. Dermed får variabelen p verdi bestemt av verdiene for *m* og *f*, $p=m\vee f$. Dette uttrykket kan vi sette inn i uttrykket for kinokveld,

$$k = p \wedge \bar{h} = (m \vee f) \wedge \bar{h}$$

Legg merke til at det står parentes rundt $m \vee f$ fordi den logiske operatoren ∧ har større presedens (sterkere binding) enn den logiske operatoren ∨. Det samme finner vi i vanlig algebra, der multiplikasjon har større presedens enn addisjon, $2+3\cdot4 \neq (2+3)\cdot4$.

En sannhetstabell for kinoproblemet med *m*, *f* og *h* som inngangsvariable vil bli slik,

m	f	h	$p = m \vee f$	$\bar{h}$	$k = p \wedge \bar{h}$
S	S	S	S	F	F
S	S	F	S	S	S
S	F	S	S	F	F
S	F	F	S	S	S
F	S	S	S	F	F
F	S	F	S	S	S
F	F	S	F	F	F
F	F	F	F	S	F

Tabellen viser at det er 3 muligheter for kino,

mor sponser og det er ikke hjemmelekser,

far sponser og det er ikke hjemmelekser,

både mor og far sponser og det er ikke hjemmelekser.

Det samme skriver vi med en enkelt setning,

mor eller far sponser og det er ikke hjemmelekser.

Logisk eller er inklusiv, det vil si at et eller-uttrykk mellom 2 variable er sann dersom den ene, den andre eller begge variablene er sann. I dette tilfellet vil det si at sponsing kan komme fra enten mor, far eller begge to!

Implikasjon

Vi sier at utsagnet $p \rightarrow q$ (leses *hvis p, så q*) er falsk bare hvis utsagnet p er sann og samtidig q er falsk. Dette er enklere å se av en sannhetstabell,

p	q	$p \rightarrow q$
S	S	S
S	F	F
F	S	S
F	F	S

Dette er et sammensatt utsagn der *p* gjerne kalles hypotesen eller den tilstrekkelige betingelsen og *q* er konsekvensen eller den nødvendige betingelsen. En implikasjonen kan formuleres på mange måter:

hvis *p*, så *q*	*p* er tilstrekkelig for *q*
p medfører *q*	*q* hvis *p*
hvis *p*, *q*	*q* hver gang når *p*
p bare hvis *q*	*q* er nødvendig for *p*

Implikasjoner brukes til å teste sammenhenger av typen hvis-så, forutsetning-konklusjon eller årsak-virkning. Den logiske bruken av implikasjon er litt mer firkantet enn slik vi oppfatter det i dagligtalen der vi kan si omtrent slik,

'Hvis sola skinner gir treet skygge'.

Dette tester vi med definisjonen ovenfor av implikasjon, det *s* = 'Sola skinner' og *t* = 'Treet gir skygge' er de to primærutsagnene i implikasjonen,

s	t	$s \rightarrow t$
S	S	S
S	F	F
F	S	S
F	F	S

Som du ser blir det litt rart å si at implikasjonen er falsk bare hvis sola skinner og treet ikke gir skygge. Det blir også vanskelig å si at kombinasjonen 'sola skinner ikke' og 'treet gir skygge' gir sann implikasjon. Men etter definisjonen av logisk implikasjon er det bare slik det er!

Implikasjonen $p \rightarrow q$ leses 'hvis *p*, så *q*' eller '*p* impliserer *q*' eller også '*p* medfører *q*'. Som alternativ til uttrykket for implikasjon kan vi sette opp et logisk uttrykk som er ekvivalent med dette

$$p \rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \overline{p} \vee q$$

som tilsvarer sann for 1., 2. og 4. rad i sannhetstabellen øverst. I mange sammenhenger er det nyttig å skrive om et implikasjonsuttrykk på denne måten for ikke å snuble i logikken.

Implikasjoner dreier seg om to utsagn, der det ene testes mot det andre for å se om det er en hvis-så -sammenheng. De to primærutsagnene behøver ikke å ha noe med hverandre å gjøre. For eksempel kan vi sette opp,

p = "poteter er bær"
q = "kuer er husdyr"

-og implikasjonen $p \rightarrow q$ blir sann fordi *p*=falsk og *q*=sann.

En falsk implikasjon får vi av bare en sann premiss og en falsk konklusjon. Det betyr av hvis vi kommer til en falsk konklusjon fra en sann premiss må vi ha gjort en logisk feil underveis. Motsatt, hvis vår premiss er falsk eller hvis vår konklusjon er sann kan vi ha gjort en riktig slutning.

Ole gjør følgende avtale med sin mor: Hvis jeg rydder rommet, så gir du meg ukelønn. Vi setter opp en tabell som viser når avtalen er brutt:

Rommet er ryddet	Ole får ukelønn	Brutt avtale?
S	*S*	*Nei*
S	*F*	*Ja*
F	*S*	*Nei*
F	*F*	*Nei*

Altså, avtalen sier ingen ting om å gi ukelønn hvis rommet ikke er ryddet. Den er heller ikke brutt hvis rydding gir ukelønn. Bare i tilfellet at rydding ikke gir ukelønn kan vi si at avtalen er brutt. Brutt avtale er negasjonen av vår implikasjon. Hvis vi ser på det alternative uttrykket for implikasjoner, i dette tilfellet $\overline{r} \vee u$, der $r = '\text{rommet er ryddet}'$ og $u = '\text{jeg får ukelønn}'$ kan vi si at implikasjonen er sann hvis

'rommet er ikke ryddet og Ole får ikke ukelønn'
og
'rommet er ikke ryddet og Ole får ukelønn'
og
'rommet er ryddet og Ole får ukelønn'

I vår kalender kommer påsken etter visse regler ut på vårparten, men alltid slik at 1. påskedag faller på en søndag. Vi kan formulere dette som en implikasjon på flere måter,

hvis der er påskedag, så er det søndag,
at det er påskedag medfører at det er søndag,
det er søndag hvis det er påskedag,
det er påskedag bare hvis det er søndag,
det kan ikke være påskedag hvis det ikke er søndag,
at det er påskedag er nok for at det er søndag,
at det må være søndag er en nødvendig forutsetning for at det er påskedag.

Eksempel 7

$p = p(x) \;=\; 'x \text{ er større enn } 3'$ (premiss)

$q = q(x) \;=\; 'x + 10 \text{ er større enn } 13'$ (konklusjon)

$p \rightarrow q \;=\; \text{'Hvis } x \text{ er større enn } 3 \text{ så er } x + 10 \text{ større enn } 13' \;=\; x > 3 \rightarrow x + 10 > 13$

Premissen $x > 3$ er matematisk det samme som $x + 10 > 13$ – som igjen er det samme som konklusjonen. Vi har sann premiss og sann konklusjon og implikasjonen (se sannhetstabellen) er sann. Det er her brukt $p(x)$ og $q(x)$ som uttrykk for premiss og konklusjon for å markere at begge er åpne utsagn med sannhetsverdi avhengig av x. ∃

Eksempel 8

$'\text{Hvis x er større enn 2, så er } x + 3 \text{ større enn } 7'$

$p = p(x) \;=\; x > 2$ (premiss)

$q = q(x) \;=\; x + 3 > 7$ (konklusjon)

$p \rightarrow q \;=\; x > 2 \rightarrow x + 3 > 7$ (implikasjon)

Med $x = 3$ får vi en sann premiss og falsk konklusjon. Implikasjonen kan ikke generelt være sann. ∃

Eksempel 9

$'\text{Hvis } 3 = 0, \text{ så er } 7 = 7'$

Matematisk sett er det slik at '3 = 0' er likeverdig med '3+2 = 0+2', det vil si '5 = 2' fordi vi adderer 2 på hver side. Vi kan også snu om på høyre og venstre side, '2 = 5'. Hvis vi summerer disse to uttrykkene får vi '5+2 = 2+5' eller altså '7 = 7'. ∃

Eksempel 10

'"Hvis 2 = 5, så er 6 = 9"'

Matematisk sett er det slik at '2 = 5' er likeverdig med '2+4 = 5+4', det vil si '6 = 9' fordi vi adderer 4 på hver side. Vi har kommet til en falsk konklusjon fra en falsk premiss ved korrekte logiske logisk-matematisk resonnement. ∃

Det kan være lurt å trene på å teste uttrykk med premisser og konklusjon for å venne seg til reglene som gjelder. Ifølge den logikken vi her holder på med kan vi for eksempel vise at med '3 = 0' som premiss kan vi komme fram til at konklusjonen '7 = 7' er sann! La oss prøve, Snodige greier, men dette er altså eksempel på at vi ut fra en falsk premiss har kommet fram til sann konklusjon ved korrekte regneregler, og implikasjonen $2=6 \rightarrow 10=10$ er sann.

En implikasjon er et eksempel på et sammensatt logisk uttrykk, det har altså verdien falsk eller sann ifølge definisjonen eller sannhetstabellen innledningsvis. Vi bør ikke tøye forståelsen lenger enn dette, som siste eksempel viser:

$r = '\text{du har regnet riktig}'$ (premiss)

$s = '\text{du får sjokolade}'$ (konklusjon)

$'\text{Hvis du har regnet riktig, så får du sjokolade}'$, $r \rightarrow s$ (implikasjon)

r	s	$r \rightarrow s$
S	S	S
S	F	F
F	S	S
F	F	S

Implikasjonen er altså sann hvis du for eksempel ikke regner riktig og får sjokolade!

En implikasjon sammenliknes noen ganger med et uttrykk av typen *if-then* eller *if-then-else* i dataprogrammering. Dette er to ting som ikke har noe med hverandre å gjøre. I regneark har vi laget if-then-else uttrykk av typen B2=HVIS(A2 < 13; "BARN"; "IKKE BARN") som setter en av de to 'verdiene' inn i celle B2 alt etter om den logiske testen A2<13 er sann eller falsk.

En implikasjon kan vi sette opp i et regneark som A2=ELLER(IKKE(P2); Q2) der premissen ligger som sannhetsverdi i P2 og konklusjonen som sannhetsverdi i Q2 . A2 får resultatet, det vil si implikasjonens verdi. Formelen i celle A2 er omskrivningen av implikasjon, $\overline{\text{P2}} \vee \text{Q2}$.

Negasjonen til en implikasjon har følgende sannhetstabell:

p	q	$\overline{p \rightarrow q}$
S	S	F
S	F	S
F	S	F
F	F	F

-eller uttrykt med logiske operatorer, $\overline{p \rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$. Implikasjonen "Hvis det regner, så er det skyer" kan negeres slik, "Det er ikke slik at hvis det regner så er det skyer", eller som "Det regner og det er ikke skyer".

Kontrapositivt utsagn er en implikasjon satt opp ut fra en implikasjon der opprinnelig premiss og konklusjon bytter plass og samtidig negeres.

$p \rightarrow q$ (en implikasjon)

$\overline{q} \rightarrow \overline{p}$ (den kontrapositive implikasjonen)

At disse to utsagnene er logisk ekvivalente ser vi av en sannhetstabellutvikling,

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \to q$	$\overline{q} \to \overline{p}$
S	S	F	F	S	S
S	F	F	S	F	F
F	S	S	F	S	S
F	F	S	S	S	S

Kontrapositive utsagn er nyttige bevisteknikker i matematikken. Implikasjonen "Hvis x^2 er et partall, så er x et partall" kan uttrykkes kontrapositivt som "Hvis *x* ikke er et partall, så er x^2 ikke et partall", som er likeverdig med "Hvis *x* er et oddetall, så er x^2 et oddetall". La oss se om det er mulig å komme fra sann premiss til sann konklusjon:

Et oddetall x kan generelt skrives som $x=2n+1$,
da blir $x^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$,
og x^2 er et oddetall fordi det forrige uttrykket ikke er delelig med 2.

Vi har vist at implikasjonen "Hvis x^2 er et partall, så er *x* et partall" ved å vise at det kontrapositive uttrykket "Hvis *x* er et oddetall, så er x^2 et oddetal" er sann.

Biimplikasjon

Vi sier at utsagnet $p \leftrightarrow q$ (leses *p hvis og bare hvis q*) er sann bare hvis begge utsagn *p* og *q* er falske eller begge er sanne.

p	q	$p \leftrightarrow q$
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	S

Et alternativt uttrykk for biimplikasjon er $(p \to q) \wedge (q \to p)$ eller $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge q)$.

En biimplikasjon er en logisk og-operasjon mellom en implikasjon $p \to q$ og *den omvendte implikasjonen* $q \to p$,

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
S	S	S	S	S
S	F	F	S	F
F	S	S	F	F
F	F	S	S	S

Eksempel 11

Vi kan vise at biimplikasjonen $(x^2>4) \to (x>2 \vee x<-2)$ er sann slik:

$p=x^2>4$

$q=x>2 \vee x<-2$

$p \Rightarrow q \;=\; \overline{p} \vee q \;=\; x^2 \le 4 \vee x>2 \vee x<-2$ som er sant,

$q \Rightarrow p \;=\; \overline{q} \vee p \;=\; \overline{x>2 \vee x<-2} \vee x^2>4 \;=(x \le 2 \wedge x \ge -2) \vee x^2>4$ som også er sant,

Altså er $(x^2>4) \Leftrightarrow (x>2 \vee x<-2)$ sann. ∃

Eksempel 12

La s = 'Det er skyer på himmelen' og r = 'det regner'. Da er *s* en nødvendig betingelse for *r* for uten skyer er det ikke regn. Hvis vi snur litt på det kan vi si at *r* er en tilstrekkelig betingelse for *s* for hvis det regner er det skyer, $r \Rightarrow s$. ∃

Eksempel 13

$x=2 \rightarrow x^2=4$ (implikasjon, alltid sann)

$x^2=4 \rightarrow x=2$ (implikasjon, ikke sann for x = -2)

Begge implikasjonene er sanne for $x \geq 0$, og det kan skrives slik med mengdenotasjoner,

$$\forall x \geq 0 : [x=2 \rightarrow x^2=4] \text{ og } [x^2=4 \rightarrow x=2]$$

eller som biimplikasjon

$$\forall x \geq 0 : [x=2 \Leftrightarrow x^2=4]$$

∃

Eksempel 14

Pythagoras teorem sier: hvis en trekant er rettvinklet så er kvadratet av hypotenusen lik summen av kvadratene de to andre sidene. Hvis vi snur på premiss og konklusjon får vi utsagnet: Hvis kvadratet av den lengste siden er lik summen av kvadratene av de to andre sidene så er trekanten rettvinklet. I dette tilfellet er begge implikasjonene sanne.

Her er et annet utsagn: hvis to vinkler er rettvinklede er de like store. Det motsatte utsagnet blir: hvis to vinkler er like store er de rettvinklede. Det første er sant, det andre er usant. ∃

En implikasjon $p \rightarrow q$ kan uttrykkes som at '*p* er en tilstrekkelig betingelse for *q*'.

En implikasjon $q \rightarrow p = \overline{p} \rightarrow \overline{q}$ kan uttrykkes som at '*p* er en nødvendig betingelse for *q*'.

En biimplikasjon $p \leftrightarrow q$ kan uttrykkes som at '*p* er en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for *q*'.

Løsningsmengde og implikasjon

Et åpent utsagn $p(x)$ som dreier seg om heltall har $\mathbb{Z}$ (tallet 0 og de naturlige tall) som grunnmengde og de tall som gjør utsagnet sant som løsningsmengde. Grunnmengden kalles generelt **U** og løsningsmengden **L**. Dette skrives gjerne slik:

$\boldsymbol{L}_p = \{ x \in U \mid p(x) \text{sann} \}$ 'Løsningsmengden til *p* er alle *x* i **F** som gjør *p*(*x*) sann'

Hvis to åpne utsagn *p*(*x*) og *q*(*x*) har felles grunnmengde **F**, og løsningsmengder

$\boldsymbol{L}_p = \{ x \in U \mid p(x) \text{sann} \}$ og $L_q = \{ x \in U \mid q(x) \text{sann} \}$

kan det vises at implikasjonen $p(x) \Rightarrow q(x)$ er sann hvis og bare hvis $L_p \subseteq L_q$.

Eksempel 15

Partall kan skrives som $2 \cdot n$ der n er et naturlig tall. Hvis x er partall kan vi sette $x=2 \cdot n$. Hvis x^2 er partall kan vi skrive $x^2=(2 \cdot n)^2=4 \cdot n^2$. Her er noen verdier for x og x^2 :

x:	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	..	..
x2:	4	16	36	64	100	144	..	..				

Her ser vi at alle tallene i den nederste rekka finnes i den øverste, men ikke omvendt. ∃

Operatorpresedens

Det er nevnt tidligere at logiske operatorer i sammensatte uttrykk evalueres etter presedens eller viktighet, i denne rekkefølgen:

- negasjon
- logisk og (fra venstre mot høyre)
- logisk eller (fra venstre mot høyre)
- implikasjon
- ekvivalens

Dessuten kan det brukes parenteser for å styre evalueringen eller gjøre de tydeligere hva som menes. Uttrykket $p \vee q \wedge r \rightarrow x \wedge \overline{y \vee z}$ evalueres som $[p \vee (q \wedge r)] \rightarrow [x \wedge (\overline{y \vee z})]$.

Alle logiske operasjoner med to variable

p	q	Kontra-diksjon σ	Ikke-eller $\overline{p \vee q}$	Ikke-omv. implikasjon $\overline{q \rightarrow p}$	(Ikke p) $\overline{p}$	Ikke-implika-sjon $\overline{p \rightarrow q}$	(Ikke q) $\overline{q}$	Eksklusiv eller $p \veebar q$	Ikke-og $\overline{p \wedge q}$
S	S	F	F	F	F	F	F	F	F
S	F	F	F	F	F	S	S	S	S
F	S	F	F	S	S	F	F	S	S
F	F	F	S	F	S	F	S	F	S

p	q	Og $p \wedge q$	Biimplika-sjon $p \leftrightarrow q$	(q) q	Implika-sjon $p \rightarrow q$	(p) p	Omvendt implikasjon $q \rightarrow p$	Eller $p \vee q$	Tautologi τ
S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
S	F	F	F	F	F	S	S	S	S
F	S	F	F	S	S	F	F	S	S
F	F	F	S	F	S	F	S	F	S

Implikasjonene (bortsett fra biimplikasjon) er ikke kommutative operasjoner – rekkefølgen av primærutsagnene kan ikke byttes om.

Argumenter og bevis

Et argument er en liste med logiske utsagn, premisser, som avsluttes med en konklusjon. Dette settes gjerne opp på en ryddig måte, her er to skrivemåter som brukes ofte,

Argumentasjonsform		Symbolsk form
P_1	*Eksempel*	$[P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ...] \Rightarrow Q$
P_2		
P_3	Hvis det snør, så er vi inne	*Eksempel* :
...	Det snør	
----------	---------------------------	$[(\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg q)] \Rightarrow p$
$\therefore Q$	Derfor: Vi er inne	

I argumentasjonsform samles premissene (P_1, P_2, P_3, ...) over en strek og konklusjonen innledes med **∴** (derfor) under streken. På symbolsk form setter vi opp en premisskjede som en logisk og -operasjon av premissutsagnene, og lager en samlet implikasjon mellom premisser og konklusjon. Nedenfor blir det omtrent bare brukt symbolsk form til å sette opp argumenter. Premisskjeden består av utsagn forbundet med logisk og, rekkefølgen på disse har etter reglene for logisk algebra ingen betydning for resultatet.

Her er et lite argument,

'Hvis det ikke regner, så er vi ute. Vi er ikke ute, derfor regner det.'

og slik vil det se ut når vi setter det opp på formell form:

Argumentasjonsform	Symbolsk form
Hvis det ikke regner, så er vi ute	Setter $r=$'Det regner' , $u=$'Vi er ute'
Vi er ikke ute	
--	$[(\bar{r} \rightarrow u) \wedge (\bar{u})] \Rightarrow r$
Derfor: Det regner	

Når vi har rigget opp et argument, kan vi ganske enkelt finne ut om det er gyldig slik:

Et argument $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ...) \Rightarrow Q$ er gyldig

hvis hele uttrykket $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ...) \Rightarrow Q$ alltid er SANN.

En alternativ formulering av regelen om et gyldig argument er slik:

Et argument $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ...) \Rightarrow Q$ er gyldig

hvis *Q* er SANN når alle $P_1, P_2, P_3, ...$ er SANN.

I prinsippet skulle vi nå kunne omforme argumentasjoner til logiske uttrykk der for eksempel metoden med sannhetstabell kan vise resultatene. Ulempen er gjerne at det kan bli mange logiske variable å håndtere – med tilsvarende mange kolonner i tabellen. Det finnes en rekke regler til å sjekke gyldigheten av argumenter som forenkler arbeidet.

Et bevis er teknisk sett måten vi finner ut om argumentet er gyldig. Det er flere måter å gjøre dette på, men vi prøver å velge den enkleste eller mest elegante.

Eksempel 16

Vi tester prinsippene ovenfor med å argumentet

'Hvis det ikke regner, så er vi ute. Vi er ikke ute, derfor regner det.'

Her setter vi at r = 'det regner' og u = 'vi er ute' og setter opp argumentet som $P \Rightarrow Q$ på symbolsk form,

$$[(\bar{r} \rightarrow u) \wedge \bar{u}] \Rightarrow r \qquad \text{der} \quad P = (\bar{r} \rightarrow u) \wedge \bar{u} \quad \text{og} \quad Q = r$$

Her er det bare to logiske variable, og vi lager en sannhetstabell,

r	u	$\bar{r}$	$(\bar{r} \rightarrow u)$	$\bar{u}$	$P = (\bar{r} \rightarrow u) \wedge \bar{u}$	$P \Rightarrow Q$
S	S	F	S	F	F	S
S	F	F	S	S	S	S
F	S	S	S	F	F	S
F	F	S	F	S	F	S

Her kan vi konkludere med at $P \Rightarrow Q$ er en tautologi (alltid SANN) og vi har et gyldig argument. Legg også merke til at premisskjeden er SANN når begge delene i den er SANN. ∃

[Dobbeltpil, ⇒, brukes gjerne i betydningen 'impliserer' og tilsvarer tegnene ∴ som står mellom premisser og konklusjon, og som kort kan leses 'derfor'. Det er også vanlig å se at det brukes enkeltpil, →, til dette. Forskjellen ligger i at et utsagn som $a \rightarrow b$ er likeverdig med det boolske uttrykket $\neg a \vee b$ mens dobbeltpil brukes i en implikasjon som skille mellom premisser og konklusjon.]

Det beviset vi har gjennomført ovenfor kunne vi ha gjort som direkte slutninger slik,

$(\bar{u}) = \text{SANN}$ fordi $u = \text{'Vi er ute'} = \text{FALSK}$

$u = \text{FALSK}$ gir $(\bar{r} \rightarrow \text{FALSK}) = \text{SANN}$, dvs. $r = \text{SANN}$ etter def. på implikasjon.

Vi har nå funnet ut at de to premissdelene begge er SANN for u = FALSK og r = SANN og vi har SANN premisskjede. Dermed har vi funnet at det er riktig at konklusjonen er 'det regner'.

Dette beviset har følgende struktur, $[(p \rightarrow q) \wedge \bar{q}] \Rightarrow \bar{p}$ og er en av de slutningsreglene som generelt gjelder. Hvis du setter inn at p='det er pent vær' og q='fuglene kvitrer', så kan vi si at

'Hvis det er pent vær så kvitrer fuglene. Fuglene kvitrer ikke, derfor er det ikke pent vær'.

Slutningsregler

Slutningsregler er logiske implikasjoner som er bevist generelt å være sanne. De kan altså brukes til å føre bevis – vi kan sette inn våre utsagn og så å si beregne om vi har et gyldig bevis - de gjelder uansett hvilke logiske utsagn som settes inn. Her følger de mest brukte:

Konjunktiv forenkling

$$[p \wedge q] \Rightarrow p \quad , \quad [p \wedge q] \Rightarrow q$$

Hvis *p* ***og*** *q* er SANN så er *p* og *q* også SANN hver for seg.

Eks. Hvis roser er røde og fioler er blå, så er roser røde.
Hvis roser er røde og fioler er blå, så er fioler blå.

Eliminasjon

$$[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q \quad , \quad [(p \vee q) \wedge \neg q] \Rightarrow p$$

Hvis *p* ***eller*** *q* er SANN og den ene av dem er FALSK, så er den andre SANN.

Eks. Hvis kokka eller butleren gjorde det, og vi vet at kokka ikke gjorde det,
så var det butleren som gjorde det.

Bekreftelse, Modus Pollens

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

Hvis *p* medfører *q* – og *p* er SANN så er *q* også SANN.

Eks. Hvis det er solskinn så ligger jeg i skyggen.
Sola skinner
∴ Jeg ligger i skyggen

Kontrapositiv bekreftelse, Modus Tollens

$$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$$

Hvis *p* medfører *q* – og *q* er FALSK så er *p* også FALSK.

Eks. Hvis det er solskinn så ligger jeg i skyggen.
Jeg ligger ikke i skyggen.
∴ Det er ikke solskinn.

Lenket implikasjon

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (r \rightarrow r)$$

Hvis *p* medfører *q* som igjen medfører *r,* så vil *p* medføre *r*.

Eks. Hvis flyet fra Oslo er forsinket, så blir flyet fra Tromsø forsinket, og
hvis flyet fra Tromsø er forsinket, så kommer jeg sent
– er det samme som at hvis flyet fra Oslo er forsinket, så kommer jeg sent.

Selvmotsigelse

$$[\neg p \rightarrow FALSK] \Rightarrow p$$

Hvis vi antar at *p* er FALSK og medfører en selvmotsigelse, vil *p* være SANN.

Direkte bevis

Et direkte bevis tar utgangspunkt i en premisskjede der vi forsøker å vise at konklusjonen er resultat av logiske korrekte overganger (slutningsregler).

Eksempel 17

Vis at 'Hvis vi tar produktet av to oddetall, så får vi er et oddetall'.

Oddetall kan skrives som $2m+1$ der *m* er et naturlig tall.

Setter vi at a og b er oddetall har vi da $a=2m_1+1$ og $a=2m_2+1$ og produktet blir

$$a \cdot b=(2m_1+1)(2m_2+1)=4m_1m_2+2m_1+2m_2+1=2(2m_1m_2+m_1+m_2)+1=2m_3+1 \quad ,$$

altså et nytt oddetall – og påstanden er bevist.

Legg merke til at vi ikke har bevist det motsatte, at et oddetall som kan faktoriseres består av oddetallsfaktorer.

$$'\text{Hvis } x \text{ er et oddetall, så er } x^2 \text{ et oddetall}'$$

Et oddetall kan skrives som $x=2n-1$, der n er et naturlig tall, slik at

$$x^2=(2n-1)^2=4n^2-4n+1=2(2n^2-2n)+1$$, altså et partall + 1. ∃

Indirekte bevis

Vi kan bevise en påstand ved å ta utgangspunkt i en likeverdig indirekte påstand.

Kontrapositivt bevis

er basert på at implikasjonen $P \rightarrow Q$ og den kontrapositive formen $\overline{Q} \rightarrow \overline{P}$ er logisk likeverdige. Dette gjøres i 3 trinn,

1. Sett opp implikasjonen som skal bevises, $P \rightarrow Q$
2. Skriv om uttrykket til kontrapositiv form, $\overline{Q} \rightarrow \overline{P}$
3. Bruk logisk korrekte overganger fra $\overline{Q}$ og vis at $\overline{P}$ gjelder.

Eksempel 18

La *x* og *y* være heltall (...-2, -1, 0, 1, 2, ...). Vi skal bevise påstanden:

"Dersom $x+y \geq 4$, så er enten $x \geq 2$ eller $y \geq 2$ ".

Løsning: Vi definerer disse utsagnene:

$p:\ x+y \geq 4 \qquad s:\ x \geq 2 \qquad t:\ y \geq 2$

Her er implikasjonen og en omskriving til kontrapositiv form:

$p \rightarrow (s \vee t) \quad \equiv \quad \overline{s \vee t} \rightarrow \overline{p} \quad \equiv \quad \overline{s} \wedge \overline{t} \rightarrow \overline{p}$

Den siste utgaven sier at 'hvis $x<2$ og samtidig $y<2$ så er $x+y<4$ – og det er opplagt sant, og det kontrapositive av implikasjonen er sant – og dermed også implikasjonen. Påstanden er bevist. ∎

Bevis ved selvmotsigelse

går ut på å vise indirekte at $P \rightarrow Q$ ved å vise at $\overline{P \rightarrow Q} = P \wedge \overline{Q}$ er en selvmotsigelse. Vi skal bevise at en påstand er sann, men starter med å sette at påstanden er falsk. Deretter tester vi den falske påstanden – og hvis det viser seg at den umulig kan være falsk – så har vi indirekte funnet at påstanden er sann likevel.

Eksempel 19

Med direkte bevisføring fant vi tidligere at

$'\text{Hvis } a \text{ er et oddetall, så er } a^2 \text{ et oddetall}'$

Vi kan ikke uten videre snu utsagnet om til at

$'\text{Hvis } a^2 \text{ er et oddetall, så er } a \text{ et oddetall}'$,

det skal vi nå vise med metoden bevis ved selvmotsigelse. Vi starter med å sette at et oddetall kan skrives som $2m+1$ og et partall som $2m$ og disse to påstandene:

$p:\ 'a^2 \text{ er et oddetall', tilsvarende } a^2=(2m_1+1)^2 \text{ er oddetall}$

$q:\ 'a \text{ er et oddetall', tilsvarende } a=2m_2+1 \text{ er oddetall}$

Med utgangspunkt i påstand q kan vi med matematiske omforminger se at

$a^2=(2m_2+1)^2=4m^2+4m+1=2(2m^2+2m)+1$, altså på formen $2m_3+1$ - som er et oddetall. Så langt har vi vist implikasjonen $q \Rightarrow p$.

Det motsatte må også vises, $p \Rightarrow q$, og det gjør vi ved å sette det opp ved å bruke regelen om at det er ekvivalent med det kontrapositive utsagnet, $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$:

$\bar{q}$ betyr nå at ' a er et partall' som kan skrives om til $a=2m_3$. Vi kvadrer for å finne ut hva slags tall vi da får, $a^2=(2m_3)^2=4m_3^2=2(2m_3^2)=2m_4$ - et nytt partall. Vi har vist at den kontrapositive påstanden er sann – og dermed også at $p\Rightarrow q$ er sann.

Til slutt kombinerer vi det vi har kommet fram til, $(q\Rightarrow p)\ \wedge\ (p\Rightarrow q)$ som betyr det samme som $p\Leftrightarrow q$ – og endelig er alt bevist. ∃

Neste eksempel illustrerer forskjellen mellom utsagn av typen 'hvis *a*, så *b*' og 'hvis – og bare hvis *a*, så *b*' – det første er en implikasjon, det andre en biimplikasjon.

Eksempel 20

Her er det kanskje mest berømte beviset fra de gamle grekere, som viser at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Et rasjonalt tall kan skrves som en brøk $\frac{m}{n}$ som er forkortet mest mulig – og et irrasjonalt tall er et tall som ikke kan skrives som en slik forkortet brøk. Antar det motsatte av det vi skulle bevise, at $\sqrt{2}$ kan skrives som $\frac{m}{n}$, altså $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$.

Kvadrer på begge sider av den påståtte likheten, $2=\frac{m^2}{n^2}$, som også gir $m^2=2n^2$, som sier at m^2 er delelig med 2, det vil si at m^2 er et partall. Nå er det lett å vise1) at om m^2 er et partall, så er også *m* et partall, altså $m=2k$. Da kan vi omskrive likheten $m^2=2n^2$ til $(2k)^2=2n^2$ og videre, $4k^2=2n^2$, og etter forkorting, $2k^2=n^2$. Altså, hvis m er delelig med 2 så er også n^2 og dermed *n* delelig med 2. Vi har da at både *m* og *n* er delelige med 2 – og brøken $\frac{m}{n}$ lar seg forkorte – noe som betyr at den opprinnelige antakelsen at $\frac{m}{n}$ var forkortet helt ned er en selvmotsigelse.

Det er bevist ved selvmotsigelse at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som et rasjonalt tall (forkortet brøk $\frac{m}{n}$), og er dermed et ikke-rasjonalt tall også kalt irrasjonalt tall.

*) Dette viser vi i et annet eksempel. ∃

Eksempel 21

En ikke ukjent matematiker, Euclid, spekulerte over tallteori og primtall (heltall som er delelige med bare 1 og seg selv). Han fant ut at 'det største primtallet finnes ikke' ved å gjennomføre et bevis ved motsigelse.

Det hører med til historien at beviset bygger på fundamentalsetningen i aritmetikk som sier at et hvilket som helst heltall kan entydig skrives som et produkt av primtall. Ta for eksempel de første 12 heltallene, $2=2$, $3=3$, $4=2\cdot 2$, $5=5$, $6=2\cdot 3$, $7=7$, $8=2\cdot 2\cdot 2$, $9=3\cdot 3\cdot 3$, $10=2\cdot 5$, $11=11$, $12=2\cdot 2\cdot 3$, ...

Alle heltall har med andre ord primtall som faktorer – hvis de selv ikke er primtall. Tall som ikke er primtall kalles gjerne sammensatte tall.

Beviset er slik:

- Vi antar at det største primtallet finnes, og det er w . Vi multipliserer sammen alle primtall til og med w , legger til 1 og får et nytt tall, $N=(1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot ...\cdot w)+1$.

- Er så dette tallet *N* et primtall? Tallet *N* er iallefall minst 1 større enn *w* og ifølge påstanden er det ikke et primtall, det vil si et sammensatt tall.

- Men, slik *N* er bygget opp vil det ikke ha primtallsfaktorer, fordi en divisjon med faktorene ville ikke gå opp, men gi en rest på 1.

- Altså må *N* også være et primtall.

- Oppsummert, utsagnet i trinn 1 sier at *N* ikke er et primtall og utsagnet i trinn 4 sier at det er et primtall.

- Vi konkluderer derfor med at det vi antok i trinn 1 ikke er riktig, og dermed er det sant at det største primtallet finnes ikke. ∃

Bevis ved moteksempel er en indirekte metode som går ut 'motbevise' en påstand ved å finne et eksempel som gjør påstanden falsk. Hvis vi blir litt for ivrig i å tolke begrepet irrasjonale tall slik at vi påstår at '$\sqrt{n}$, der n er et heltall er et irrasjonalt tall' så kan vi kjekt vise at for eksempel $\sqrt{4}=2$ - som motbeviser påstanden. Konklusjon: ikke alle tall $\sqrt{n}$ er irrasjonale tall.

Bevis ved eliminasjon går ut på å sette opp alle kombinasjoner av premisser og så eliminere en og en til vi står tilbake med en mulighet. Hvis vi kan vise at et reelt tall *a* ikke er positivt, og at *a* ikke er null – ja da står vi igjen med at *a* må være negativt. Slike bevis krever at vi kan liste opp eller forutse alle muligheter før vi går i gang, her at et reelt tall må være negativt, null eller positivt.

Direkte bevis Implikasjonen $p \rightarrow q$ bevises ved å vise med gyldige slutningsregler at dersom *p* er Sann, så er også *q* Sann, (*p*=Sann og *q*=Falsk kan ikke inntreffe).

Vis at "tre etterfølgende positive heltall har en sum som er delelig med 3".

Bevis:

De tre tallene settes til $n\,,\; n+1 \;\; og \;\; n+2$,

summen er $S=n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1)$

Altså, summen *S* har en faktor på 3 og der derfor delelig med 3.

Hva om vi i utgangspunktet setter tallene til $n-1\,, n \;\; og \;\; n+1$? $S=n-1+n+n+1=3n$

Hva om vi i utgangspunktet setter tallene til $n-2\,, n-1 \;\; og \;\; n$? $S=n-2+n-1+n=3(n-1)$

Indirekte bevis Bruker samme teknikk som ved direkte bevis til å vise at det kontrapositive utsagnet $\overline{q} \rightarrow \overline{p}$, dersom *q* er Falsk så må *p* også være Falsk.

Vis at "hvis $3n+1$ er et oddetall, så er n et partall".

Det kontrapositive utsagnet er "hvis n er IKKE et partall, så er $3n+1$ IKKE et oddetall",

alternativt "hvis n er et oddetall, så er $3n+1$ et partall"

Bevis:

Tallet n skrives som oddetall $n=2m+1$,

uttrykket $3n+1$ omformes til $3n+1=3(2m+1)+1=6m+4=2(3m+2)$

- og dette er et *partall*.

Altså, utsagnet "hvis $3n+1$ er et oddetall, så er n et partall" er Sann.

Bevis ved selvmotsigelse Vi kan bevise en påstand ved å vise at dersom vi antar at den inverterte av påstanden er sann, så fører det til en selvmotsigelse.

Her er det kanskje mest berømte beviset fra de gamle grekere, som viser at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall. Et rasjonalt tall kan skrves som en brøk $\frac{m}{n}$ som er forkortet mest mulig – og et irrasjonalt tall er et tall som ikke kan skrives som en slik forkortet brøk. Antar det motsatte av det vi skulle bevise, at $\sqrt{2}$ kan skrives som $\frac{m}{n}$, altså $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$.

Kvadrer på begge sider av den påståtte likheten, $2=\frac{m^2}{n^2}$, som også gir $m^2=2n^2$, som sier at m^2 er delelig med 2, det vil si at m^2 er et partall. Nå er det lett å vise1) at om m^2 er et partall, så er også *m* et partall, altså $m=2k$. Da kan vi omskrive likheten $m^2=2n^2$ til $(2k)^2=2n^2$ og videre, $4k^2=2n^2$, og etter forkorting, $2k^2=n^2$. Altså, hvis m er delelig med 2 så er også n^2 og dermed *n* delelig med 2. Vi har da at både *m* og *n* er delelige med 2 – og brøken $\frac{m}{n}$ lar seg forkorte – noe som betyr at den opprinnelige antakelsen at $\frac{m}{n}$ var forkortet helt ned er en selvmotsigelse.

Det er bevist ved selvmotsigelse at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som et rasjonalt tall (forkortet brøk $\frac{m}{n}$), og er dermed et ikke-rasjonalt tall også kalt irrasjonalt tall.
*) Dette viser vi i et annet eksempel.

Induksjonsbevis

Matematisk induksjon:

La $p(n)$ være et åpent utsagn med definisjonsmengde $D=\{n\in\mathbb{Z}|n\geq n_0\}$.

Da er $p(n)$ sann for alle $n\in D$ dersom følgende to punkter er oppfylt:

1. Startbetingelse: $p(n_0)$ er sann.
2. Induksjonstrinn: for alle $k\in D$ gjelder at hvis $p(k)$ er sann, så er også $p(k+1)$ sann.

Eksempel 22

Vis at $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ for $n=1,2,3,...$

1. Startbetingelse, *n*=1: Venstre side = 1 Høyre side = $\frac{1(1+1)}{2}=1$ VS = HS

2. Induksjonstrinn, Venstre side = $1+2+3+...+n+(n+1)$

Høyre side = $\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n+2}{2}=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$
$=1+2+3+...+n+(n+1)$ ∎

Eksempel 23

Gitt utsagnene:

'Hvis det er helg, så går vi tur. Hvis vi ikke jobber, så er det helg. Vi går ikke på tur, derfor jobber vi'.

Satt opp som argument vil det se slik ut:

Hvis det er helg, så går vi tur.
Hvis vi ikke jobber, så er det helg.
Vi går ikke tur.
Derfor: Vi jobber.

Er dette logisk korrekt?

Løsning:

1. Innfører symboler for primærutsagnene,

h: Det er helg.
t: Vi går tur.
j: Vi jobber.

2. Setter opp argumentet på symbolsk form:

Hvis det er helg, så går vi tur, $h \rightarrow t$

Hvis vi ikke jobber, så er det helg, $\bar{j} \rightarrow h$

Vi går ikke tur, $\bar{t}$

Vi jobber, j

De tre første utsagnene er premissene, det siste er konklusjonen. På symbolsk form blir argumentet $P \Rightarrow Q$ satt opp slik:

$$[(h \rightarrow t) \wedge (\bar{j} \rightarrow h) \wedge (\bar{t})] \Rightarrow j$$

Bevis med sannhetstabell

Dette kan bli mye arbeid, det er 3 variabler og 23=8 kombinasjoner, men vi behøver til gjengjeld ikke vite om slutningsregler og andre forenklingsknep. Tester altså om *P*→*Q* som står i siste kolonne blir en tautologi:

p	q	r	$(h \rightarrow t)$	$\bar{j}$	$(\bar{j} \rightarrow h)$	$(\bar{t})$	$P = (h \rightarrow t) \wedge (\bar{j} \rightarrow h) \wedge (\bar{t})$	$P \Rightarrow Q$
S	S	S	S	F	S	F	S	S
S	S	F	F	S	S	F	S	S
S	F	S	F	F	S	S	S	S
S	F	F	F	S	S	S	S	S
F	S	S	S	F	S	F	S	S
F	S	F	F	S	F	F	F	F
F	F	S	F	F	S	S	S	F
F	F	F	F	S	F	S	F	F

Altså, etter å ha testet alle muligheter står vi igjen med at argumentet er gyldig.

Bevis ved å nøste opp premissene, direkte bevis

Vi skal se på hva som skal til for at premisskjeden $P = (h \rightarrow t) \wedge (\bar{j} \rightarrow h) \wedge (\bar{t})$ skal være SANN. Vi starter med siste utsagn, 'vi går ikke tur', og ser at det gir $\bar{t} = SANN$, og vi har at siste ledd i premisskjeden er SANN. Vi setter det opp systematisk, ledd for ledd,

$(\bar{t}) = \text{SANN}$ fordi $t = \text{FALSK}$, 'vi går ikke tur'.

$t = \text{FALSK}$ gir $(h \rightarrow \text{FALSK}) = \text{SANN}$, dvs. $h = \text{FALSK}$ etter def. på implikasjon.

$h = \text{FALSK}$ gir $(\bar{j} \rightarrow \text{FALSK}) = \text{SANN}$, dvs. $j = \text{SANN}$ som betyr 'vi jobber'.

Så langt har vi kommet til at 'hvis vi jobber, så jobber vi'. Dette er en tautologi (alltid SANN) og vi har sett at argumentet er gyldig.

Bevis ved boolsk forenkling

Her er en alternativ måte å gjøre dette på – vi 'trekker sammen' det totale utsagnet $P \rightarrow Q$, ved å innføre at en implikasjon kan skrives om, $a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$. I første omgang gjøres forenklinger av premisskjeden,

$$\begin{aligned} P &= (h \rightarrow t) \wedge (\bar{j} \rightarrow h) \wedge \bar{t} \\ &= (\bar{h} \vee t) \wedge (j \vee h) \wedge \bar{t} \\ &= (\bar{h} \wedge \bar{t} \vee m \wedge \bar{t}) \wedge (j \vee h) \\ &= \bar{h} \wedge \bar{t} \wedge (j \vee h) = \bar{s} \wedge \bar{t} \wedge (j \vee h) \\ &= (\bar{h} \wedge \bar{t} \wedge j) \vee (FALSK) = \bar{h} \wedge \bar{t} \wedge j \end{aligned}$$

- og deretter evalueres $P \rightarrow Q$, her $(\bar{h} \wedge \bar{t} \wedge j) \rightarrow j$. Bruker igjen knepet $a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$:

$$\begin{aligned} &\overline{\bar{h} \wedge \bar{t} \wedge j} \vee j \\ &h \vee t \vee \bar{j} \vee j = SANN \end{aligned}$$

Beviset er utført med ren boolsk algebra, men dette er sant å si ikke vanlig. ∃

Eksempel 24

Gitt utsagnene:

> Hvis Per går på kino blir Kari sint.
> Hvis Ola spiller kort blir Camilla sint.
> Hvis Kari eller Camilla blir sinte, blir Åse kontaktet.
> <u>Åse er ikke kontaktet.</u>
> Derfor: Per går ikke på kino og Ola spiler ikke kort.

Er dette logisk korrekt?

Innfører symboler for primærutsagnene,

> *P*: Per går på kino.
> *K*: Kari er sint.
> *O*: Ola spiller kort.
> *C*: Camilla er sint.
> *Å*: Åse er kontaktet.

Argumentet blir på symbolsk form:

$$[(P \rightarrow K) \wedge (O \rightarrow C) \wedge ((K \vee C) \rightarrow \AA) \wedge (\neg \AA)] \Rightarrow (\neg P \wedge \neg O)$$

Prøver et direkte bevis, og ser om vi får sann konklusjon når alle premissdeler er sanne:

$(\neg \AA) = \text{SANN}$ fordi $\AA = \text{FALSK}$

$\AA = \text{FALSK}$ gir $((K \vee C) \rightarrow \text{FALSK}) = \text{SANN}$, dvs. $K = \text{FALSK}$ og $C = \text{FALSK}$

$K = \text{FALSK}$ gir $(P \rightarrow \text{FALSK}) = \text{SANN}$, dvs. $P = \text{FALSK}$

$C = \text{FALSK}$ gir $(O \rightarrow \text{FALSK}) = \text{SANN}$, dvs. $O = \text{FALSK}$

Vi har så langt at for å få SANN premisskjede må vi ha kombinasjonen $\bar{O} \wedge \bar{P}$ som betyr 'Ola spiller ikke kort og Per går ikke på kino', beviset holder.

Bevis ved slutningsregler:

Vi starter med siste delen av premisskjeden der vi kan gjøre forenkling med kontrapositiv bekreftelse,

$$(P \to K) \wedge (O \to C) \wedge \underbrace{((K \vee C) \to Å) \wedge (\neg Å)}_{\text{Kontrapositiv}} = (P \to K) \wedge (O \to C) \wedge \overline{(K \vee C)}$$

Det siste leddet kan skrives om etter De Morgans lover, $\overline{K \vee C} = \overline{K} \wedge \overline{C}$,

$$(P \to K) \wedge (O \to C) \wedge \overline{K} \wedge \overline{C} = \underbrace{(P \to K) \wedge \overline{K}}_{\text{Kontrapositiv}} \wedge \underbrace{(O \to C) \wedge \overline{C}}_{\text{Kontrapositiv}} = \overline{P} \wedge \overline{O}$$

- der vi gjør to nye forenklinger med kontrapositiv bekreftelse. Vi har funnet at premisskjeden gir konklusjonen. ∃

Eksempel 25

Gitt utsagnene:

Hvis jeg sykler til skolen, så rekker jeg timen.
Hvis sykkelen er i orden, så sykler jeg til skolen.
Jeg rekker ikke timen.
Derfor: Sykkelen er ikke i orden!

Er dette logisk korrekt?

Løsning:

Innfører symboler for primærutsagnene,

s: Jeg sykler til skolen.
r: Jeg rekker timen.
o: Sykkelen er i orden.

Argumentet blir på symbolsk form:

$$[(s \to r) \wedge (o \to s) \wedge (\neg r)] \Rightarrow \neg o$$

Prøver et direkte bevis, og ser om vi får sann konklusjon når alle premissdeler er sanne:

$(\neg r) = \text{SANN}$ gir $r = \text{FALSK}$, og vi har $[(s \to r) \wedge (o \to s) \wedge (\text{SANN})]$

$(r \to \text{FALSK})$ gir $s = \text{FALSK}$, og vi har $[(\text{SANN}) \wedge (o \to s) \wedge (\text{SANN})]$

$(o \to \text{FALSK})$ gir $o = \text{FALSK}$, og vi har $[(\text{SANN}) \wedge (\text{SANN}) \wedge (\text{SANN})]$

som viser at vi har fått konklusjonen 'Sykkelen er ikke i orden' = $\neg o$.

Her er et bevis ved hjelp av slutningsregler:

$$(s \to r) \wedge (o \to s) \wedge (\neg r) \;=\; \underbrace{(s \to r) \wedge (\neg r)}_{\text{Kontrapositiv}} \wedge (o \to s) \;=\; \underbrace{(\neg s) \wedge (o \to s)}_{\text{Ny kontrapositiv}} \;=\; \neg o$$

∃

Eksempel 26

Morder og mordvåpen

Utsagn	*Logikk*
Doktor Mørk ble funnet *s*kutt i arbeidsværelset.	s
Hvis Doktor Mørk ble skutt, er mordvåpenet en *r*evolver.	$s \to r$ $[(s \to r) \wedge s] \Rightarrow r$ *)
Pastor Bregne sier at han oppholdt seg i biblioteket med frøken Rose.	Løgn ?

Fru Hvitveis sier at hun var på kjøkkenet og laget middag	Løgn ?
Hvis Fru *H*vitveis var på kjøkkenet, er *m*iddagen ferdig	$h \to m$
Professor Lavendel sier at han var alene i salongen og røkte pipe	Løgn ?
*M*iddagen er ikke ferdig	$\overline{m}$ $[(h \to m) \wedge \overline{m}] \Rightarrow \overline{h}$ *)
Hvis Doktor Mørk ble drept med en lysestake og Professor Lavendel ikke var i salongen, er Professor Lavendel morderen.	
Hvis Doktor Mørk ble drept med en revolver og Pastor Bregne var alene, er Pastor Bregne morderen.	
Hvis Doktor Mørk ble drept med *r*evolver og Fru *H*vitveis ikke var på kjøkkenet, er Fru *H*vitveis morderen.	$(r \wedge \overline{h}) \to H$ $r \wedge \overline{h}$ *) $[((r \wedge \overline{h}) \to H) \wedge (r \wedge \overline{h})] \Rightarrow H$
Hvis Doktor Mørk ble drept med gift og Fru Rose var alene, er Fru Rose morderen.	
Fru Rose sier at hun var på biblioteket sammen med Pastor Bregne	

Altså: Fru Hvitveis drepte Doktor Mørk med revolver!

Hvem var i hytta?

Utsagn	*Logikk*
Hvis Ine ikke var i hytta, så er Sigurd ikke synderen.	
Regine er ikke synderen.	
Hvis Regine var i hytta, så er Hans ~~synderen.~~ i hytta.	$r \to h$
Ine eller Regine (eller begge) var i hytta.	$i \vee r$
Hvis Ine var i hytta, så var Sigurd ikke i hytta.	$i \to \overline{s}$
Hvis Sigurd ikke var i hytta, så er Regine ~~synderen.~~ i hytta.	$\overline{s} \to r$ $[(i \to \overline{s}) \wedge (\overline{s} \to r)] \Rightarrow (i \to r)$ Begge var i hytta

Altså: Ine, Regine og Hans var i hytta.

Hvem er synderen?

Utsagn	*Konklusjon*
Hvis Ine ikke var i hytta, så er Sigurd ikke synderen.	
Regine er ikke synderen.	
Hvis Regine var i hytta, så er Hans synderen.	$r \to H$ $[(r \to H) \wedge r] \Rightarrow H$
Ine eller Regine (eller begge) var i hytta.	
Hvis Ine var i hytta, så var Sigurd ikke i hytta.	
Hvis Sigurd ikke var i hytta, så er Regine synderen.	

Altså: Hans er synderen! ∃

Oppgaver

Oppgave 1

For hver av de følgende setninger skal du avgjøre om de er

-logiske utsagn - og finne sannhetsverdi

-åpne utsagn

-ikke logiske utsagn – og forklar hvorfor

a) 'Alle kråker sier krakra.'

b) $\frac{0}{e} = \frac{0}{\pi}$

c) 'Katta sitter på matta.'

d) 'Jorda er flat'

e) 'Det største primtallet finnes ikke.'

f) $\frac{1}{x} \to 0 \quad \text{når } x \to \infty$

g) $|x| = \sqrt{x}$

h) $-77 > -7$

Oppgave 2

I et møtereferat heter det: *Styrelederen avslo å overstyre kassererens veto til forslaget om å avlyse julebordet.* Ble det julebord eller ikke? Hvor mange negasjoner må du igjennom for å finne ut av det?

Oppgave 3

Skriv negasjonene til følgende utsagn – og finn ut om negasjonen er falsk:

a) "Summen av to oddetall er partall".

b) "Alle naturlige tall som er delelige med 2 og 3 er delelige med 6".

c) "Produktet av et partall og et oddetall er oddetall".

Oppgave 4

Hvilken betydning av *eller* finner du i ytringen '*februar har 28 eller 29 dager*'?

Oppgave 5

a) Hva blir sannhetsverdien til $S \vee \overline{m}$?

b) Hva blir sannhetsverdien til $U \wedge p$?

c) Vis at uttrykket $p \vee \overline{p}$ er en tautologi

d) Vis at uttrykket $q \wedge \overline{q}$ er en kontradiksjon.

Oppgave 6

Vis at uttrykket $a \vee \overline{a} \wedge b$ er logisk identisk med $a \vee b$.

Oppgave 7

Finn resultatet av følgende logiske uttrykk (S=sann og F=falsk):

a) $f \vee S =$

b) $g \wedge S =$

c) $j \wedge U =$

d) $k \vee U =$

e) $m \wedge \overline{m} =$

f) $p \vee \overline{p} =$

g) $q \vee \overline{q \wedge \overline{q}} =$

h) $U \wedge \overline{S \wedge \overline{U} \vee S} =$

Oppgave 8

Sett $p = '\text{Potet er grønnsak}'$ og $q = '\text{Kveite er ikke fisk}'$. Bestem sannhetsverdien til

a) $p \vee q$ b) $p \wedge q$ c) $p \wedge \overline{q}$ d) $\overline{p} \vee q$ e) $\overline{p \wedge q}$ f) $\overline{p \vee \overline{q}}$

Oppgave 9

Sett *f*='Ane er frisk', *g*='Ane er gammel' og *h*='Ane er humoristisk'. Skriv opp de sammensatte utsagnene nedenfor som uttrykk med *f*, *g* og *h* og logiske operatorer:

a) Ane er frisk og gammel.
b) Ane er ikke frisk, men hun er gammel.
c) Ane er verken frisk eller gammel.
d) Ane er enten frisk eller gammel, men ikke begge deler.
e) Ane er frisk og gammel, men ikke humoristisk.
f) Ane er frisk eller humoristisk, men ikke gammel.
g) Ane er verken frisk, gammel eller humoristisk.

Oppgave 10

Her er en sannhetstabell med *a*, *b* og *c* som inngangsvariable og *y* og *z* som resultat av sammensatte uttrykk:

a	b	c	y	z
S	S	S	F	F
S	S	F	S	F
S	F	S	F	S
S	F	F	F	S
F	S	S	S	S
F	S	F	F	S
F	F	S	F	F
F	F	F	S	F

Sett opp logiske uttrykk for y og z med a, b og c som inngangsvariable.

Oppgave 11

Sett opp sannhetstabeller for de to uttrykkene $a \vee b \wedge c$ og $a \wedge b \vee c$.

Oppgave 12

Bruk De Morgans lover til å lage alternativ formulering til negasjonen av følgende utsagn:

a) Arne sykler og Berit løper.
b) Charlie spiser is eller drikker brus.
c) Doris er lat, men ikke dum.
d) Frank er enten høyere enn 200 cm eller mindre enn 180 cm.
e) Erna er ikke 21 år og Erna er ikke 22 år.

Oppgave 13

Sett $a = 'x \text{ er enten 1 eller 2}'$, $b = 'x \text{ er enten 2 eller 3}'$ og $c = 'x \text{ er 4}'$

a) Beskriv følgende sammensatte utsagn med ord: $a \wedge (b \vee c)$
b) Beskriv følgende sammensatte utsagn med ord: $(a \wedge b) \vee c$

Oppgave 14

Sett opp negasjonen til utsagnene som matematiske uttrykk,

a) $x \geq -3$ b) x er minst lik 5 c) $x \geq 3$ eller $x < 2$

Oppgave 15

Sett $p = "x \cdot y=0"$ og $q = "x=0 \text{ eller } y=0"$

Hvilket sammensatt logisk uttrykk kan du da sette opp av disse formuleringene:

a) ''Vi har xy=0 hvis x=0 eller y=0.''

b) ''Vi har xy=0 bare hvis x=0 eller y=0.''

Oppgave 16

Hvilke av disse utsagnene er sanne?

a) $x^2 > 0 \rightarrow x > 0$

b) $x=2 \rightarrow x^4=16$

c) $x^4=16 \rightarrow x=2$

d) $x^4=16 \rightarrow x=2$

e) $x^4=16 \rightarrow (x=2) \vee (x=-2)$

f) $x^2 + y^2=0 \rightarrow (x=0) \wedge (y=0)$

Oppgave 17

Sett *s* = 'jeg sover'
n = 'det er natt'
a = 'jeg arbeider'

a) Skriv disse logiske strukturene om med dagligtale: $n \rightarrow s$ $n \rightarrow \overline{a}$ $a \wedge n \rightarrow s$

b) Skriv disse utsagnene i dagligtale om til logiske strukturer:

Jeg arbeider bare hvis jeg ikke sover.
Når jeg arbeider er det ikke natt og jeg sover ikke.
Enten er det natt, eller jeg sover eller det er begge deler.
Jeg sover ikke eller jeg arbeider ikke.

Oppgave 18

Skriv negasjonen til utsagnene:

a) 'Hvis månen er en gul ost, så er den spiselig.'
b) 'Hvis Per har 4 hjul, så er han en bil.'
c) 'Hvis *K* er en trekant, så er *K* en mangekant.'

Oppgave 19

Skriv utsagnene på kontrapositiv form:

a) 'Hvis månen er en gul ost, så er den spiselig.'
b) 'Hvis Per har 4 hjul, så er han en bil.'
c) Hvis $x > 7$ så er x positiv.
d) Hvis *n* er et primtall, så er *n* et oddetall eller $n=2$.
e) Hvis *x* er delelig med 6, så er *x* delelig med både 2 og 3.

Oppgave 20

a) Vis at de sammensatte utsagnene $p \to (q \vee r)$ og $(p \wedge \overline{r}) \to q$ er logisk identiske.
b) Sett $p = {}'\text{Det regner}'$, $q = {}'\text{Vi spiller Ludo}'$, $r = {}'\text{Vi gjør lekser}'$ og lag en muntlig formulering av det to utsagnene ovenfor.

Oppgave 21

Anta at det er sant at ' Hvis Ole står i faget, så har han fått godkjent test 1'. Hvilke av følgende utsagn er også logisk sanne? Begrunn svarene.

a) 'Hvis Ole har fått godkjent test 1, så står han i faget.'
b) 'Hvis Ole ikke har fått godkjent test 1, så står han ikke i faget.'
c) 'Ole står i faget bare hvis han får godkjent test 1.'
d) 'Hvis Ole ikke står i faget, så har han ikke fått godkjent test 1.'
e) 'En nødvendig betingelse for at Ole står i faget er at han får godkjent test 1.'
f) 'En tilstrekkelig betingelse for at Ole står i faget er at han får godkjent test 1.'

Oppgave 22

Lag sannhetstabeller for

a) $\overline{p} \wedge q$ b) $p \vee \overline{q}$ c) $\overline{r} \to s$

d) $\overline{a \to b}$ e) $p \underline{\vee} \overline{q}$ f) $\overline{p} \to (p \to q)$

Oppgave 23

a) Sett *p*=sann og *q*=falsk, hvilken sannhetsverdi har da $p \vee (q \wedge r)$?
b) Lag sannhetstabell for den logske strukturen $(a \to b) \to (b \to a)$.
c) Er uttrykkene $p \wedge (q \vee r)$ og $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ligisk ekvivalente?

Oppgave 24

Finn ut om følgende uttrykk er tautologier:

a) $p \to p$
b) $p \to (p \vee q)$
c) $((p \wedge q) \to q) \to (p \to q)$
d) $p \to (q \to p)$
e) $a \vee \overline{a} \wedge b \to a \vee b$
f) $(p \vee (p \wedge q)) \to p$
g) $(p \to q) \to (q \to p)$
h) $(p \vee q) \to (q \to (p \wedge q))$
i) $((p \vee q) \wedge r) \to (p \vee (q \wedge r))$
j) $(p \wedge q \wedge r) \to (s \vee t)$
k) $(p \wedge q) \to (p \to q)$
l) $p \to q \to (p \to q)$
m) $p \to (q \wedge (r \vee s))$
n) $(p \to q \wedge (r \to s)) \to (t \to u)$
o) $(p \wedge q) \vee r \to ((p \vee q) \wedge r)$
p) $(r \vee s \to p \wedge q) \to (p \to (q \to r \vee s))$

Oppgave 25

Bevis utsagnene:

a) Hvis *u* er partall og v er par tall så er $e \cdot f$ partall.
b) Hvis *u* er partall og v er oddetall så er $u \cdot v$ partall
c) Hvis *u* er oddetall og v er oddetall så er $u \cdot v$ oddetall.

Oppgave 26

Bevis utsagnet: $n^2 + n$ er et partall.

Oppgave 27

La u være et oddetall.
Bevis utsagnet: $u^2 - 1$ er delelig med 8.

Oppgave 28

La u være et oddetall.
Bevis utsagnet: Hvis u^3 er partall så er u et partall.

Oppgave 29

La u og v være to heltall.
Bevis utsagnet: Hvis $u \cdot v$ er oddetall så er u og v begge oddetall.

Oppgave 30

Er det sant at 'hvis u er et oddetall, så er minst ett av tallene $u - 2$ og $u + 2$ primtall'?

Oppgave 31

Finn et moteksempel til utsagnet: $6n + 1$ er et primtall.

Oppgave 32

Er det sant at ' $w^2 + 7w + 12$ er ikke et primtall '?
Hvis du mener det er sant skal du bevise det, hvis du mener det er usant skal du gi et moteksempel.

Oppgave 33

Bevis eller motbevis: $7n + 2$ er et perfekt kvadrattall.

Oppgave 34

Bestem logisk struktur og finn ut om argumentene er gyldige eller ugyldige:

a) Hvis det er sol, så går vi tur.
Vi går tur.
Derfor: Det er sol.

b) Hvis det er sol, så går vi tur.
Det er ikke sol.
Derfor: Vi går ikke tur

a) Hvis det er sol, så går vi tur.
Vi går ikke tur.
Derfor: Det er ikke sol.

Vedlegg – Logikk oppsummering

Logiske operasjoner

Logisk OG

p	q	$p \wedge q$
S	S	S
S	F	F
F	S	F
F	F	F

Logisk ELLER

p	q	$p \vee q$
S	S	S
S	F	S
F	S	S
F	F	F

Logisk IKKE

p	$\overline{p}$
S	F
F	S

Operatorpresedens

1. IKKE
2. OG
3. ELLER

$$p \vee q \wedge \overline{r} \;=\; p \vee \left(q \wedge \left(\overline{r} \right) \right) \;=\; \underbrace{p \vee \overbrace{q \wedge \underbrace{\overline{r}}_{1)}}^{2)}}_{3)}$$

Sannhetstabeller

Vis at

$$p \vee \overline{p} \wedge q \;=\; p \vee q$$

		1)	2)	3)=VS	HS
p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \wedge q$	$p \vee \overline{p} \wedge q$	$p \vee q$
S	S	F	F	S	S
S	F	F	F	S	S
F	S	S	S	S	S
F	F	S	F	F	F

Tautologi, kontradiksjon

Tautologi = τ = SANN

Kontradiskjon = σ = FALSK

- uansett verdier av logiske variable

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p} = \tau = S$	$p \wedge \overline{p} = \sigma = F$
S	F	S	F
F	S	S	F

Logisk algebra

Kommutative lover	$p \vee q \;\Leftrightarrow\; q \vee p$	$p \wedge q \;\Leftrightarrow\; q \wedge p$	(1)
Assosiative lover	$(p \vee q) \vee r \;\Leftrightarrow\; p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \;\Leftrightarrow\; p \wedge (q \wedge r)$	(2)
Distributive lover	$p \vee (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(3)
De Morgans lover	$\overline{p \wedge q} \;\Leftrightarrow\; \overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p \vee q} \;\Leftrightarrow\; \overline{p} \wedge \overline{q}$	(4)
Idempotente lover	$p \vee p \Leftrightarrow p$	$q \vee q \Leftrightarrow q$	(5)
Identitetslover	$p \vee \sigma = p$	$q \wedge \tau = q$	(6)
Domineringslover	$p \vee \tau = \tau$	$q \wedge \sigma = \sigma$	(7)
Dobbel negasjon	$\overline{\overline{p}} = p$	$q = \overline{\overline{q}}$	(8)

Implikasjon, kontrapositiv, biimplikasjon

p	q	*Implikasjon* $p \rightarrow q$ $= \overline{p} \vee q$	*Kontrapositiv* $\overline{q} \rightarrow \overline{p}$ $= \overline{p} \vee q$	*Biimplikasjon* $p \leftrightarrow q$ $= p \wedge q \vee \overline{p} \wedge \overline{q}$
S	S	S	S	S
S	F	F	F	F
F	S	S	S	F
F	F	S	S	S

Slutningsregler

Bekreftelse $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ fordi $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q \;=\; \tau = S$

Kontrapositiv bekreftelse $[(p \rightarrow q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow \overline{p}$

Syllogismeloven $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow p \rightarrow r$

Forenkling, eliminasjon $[p \wedge q] \Rightarrow p$ $\quad [(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$
$[p \wedge q] \Rightarrow q$ $\quad [(p \vee q) \wedge \neg q] \Rightarrow p$

Bevis

Direkte bevis: Implikasjonen $p \rightarrow q$ bevises ved å vise med gyldige slutningsregler at dersom *p* er sann, så er også *q* sann. Tilfellet *p*=**S** og *q*=**F** kan ikke inntreffe.

Indirekte bevis: Bruker samme teknikk som ved direkte bevis til å vise at det kontrapositive utsagnet, dersom *q* er falsk så må *p* også være falsk.

Bevis ved selvmotsigelse: Vi kan bevise en påstand ved å vise at dersom vi antar at den inverterte av påstanden er sann, så fører det til en selvmotsigelse.

Predikatlogikk

Eksempel, $P(x) = '2x + 1 < 6'$ med område $D = 1, 2, 3$

Alle $\forall x \; P(x) \;=\; P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) = S \wedge S \wedge F = F$

Ikke alle $\neg \forall x \; P(x) \;=\; \overline{P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)} = \overline{S \wedge S \wedge F} = S$

Noen $\exists x \; P(x) \;=\; P(1) \vee P(2) \vee P(3) = S \vee S \vee F = S$

Modus ponens $P(a) \wedge (\forall x \;\; P(x) \rightarrow Q(x)) \;\; \therefore \;\; Q(a)$

Matematisk induksjon

1. Basistrinnet: Vis at utsagnet *P*(1) er sant.
2. Induksjonstrinnet
   - svak induksjon: Vis at dersom *P*(*n*) er sant, så er *P*(*n*+1) også sann for *n*=1,2,3,...
   - sterk induksjon: Vis at dersom *P*(1), *P*(2), ..., *P*(*n*) er sanne, så er *P*(*n*+1) også sann.

Rekursiv definisjon

Et uttrykk y_n der *n*=1, 2, 3, ... er definert rekursivt dersom

Definisjon 1
Basis: y_1 er definert
Induksjonsformel: y_n er definert ved uttrykk i y_{n-1} .

Definisjon 2
Basis: y_1 og y_2 er definert
Induksjonsformel: y_n er definert ved uttrykk i y_{n-1} og y_{n-2} .